

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ**

**LEANDRO ALBERTO NOVAK**

**MÚTIPLAS EXTRAPOLAÇÕES DE RICHARDSON  
PARA REDUZIR E ESTIMAR O ERRO DE DISCRETIZAÇÃO  
EM CONDUÇÃO DE CALOR**

**CURITIBA**

**2012**

**LEANDRO ALBERTO NOVAK**

**MÚTIPLAS EXTRAPOLAÇÕES DE RICHARDSON  
PARA REDUZIR E ESTIMAR O ERRO DE DISCRETIZAÇÃO  
EM CONDUÇÃO DE CALOR**

Tese apresentada como requisito para obter o título de Doutor em Engenharia Mecânica do Curso de Doutorado em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Paraná, na área de concentração de Fenômenos de Transporte e Mecânica dos Sólidos.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Henrique Marchi

**CURITIBA**

**2012**

# **TERMO DE APROVAÇÃO**

LEANDRO ALBERTO NOVAK

## **MÚLTIPLAS EXTRAPOLAÇÕES DE RICHARDSON PARA REDUZIR E ESTIMAR O ERRO DE DISCRETIZAÇÃO EM CONDUÇÃO DE CALOR**

Tese aprovada como requisito parcial à obtenção de grau de Doutor em Engenharia Mecânica, área de concentração Fenômenos de Transporte e Mecânica dos Sólidos, no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Setor de Tecnologia da Universidade Federal do Paraná.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Rigoberto Eleazar Melgarejo Morales  
UTFPR  
Examinador externo

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Viviana Cocco Mariani  
PUC-PR  
Examinadora externa

Prof. Dr. Luciano Kiyoshi Araki  
UFPR  
Examinador interno

Prof. Dr. Márcio Augusto Villela Pinto  
UFPR  
Examinador externo

Prof. Dr. Carlos Henrique Marchi  
UFPR  
Presidente da Banca Examinadora

Curitiba, 16 de maio de 2012.

Novak, Leandro Alberto

Múltiplas extrapolações de Richardson para reduzir e estimar o erro de discretização em condução de calor / Leandro Alberto Novak. – Curitiba, 2013.

140 f.: il.; tabs.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em engenharia mecânica.

Orientador: Carlos Henrique Marchi

1. Calor (transmissão). 2. Equações – Soluções numéricas. 3. Funções (Matemática). 4. Mecânica dos fluídos. I. Marchi, Carlos Henrique. II. Universidade Federal do Paraná. III. Título.

CDD: 621.4022

## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus pais Ivonete e Élio Novak com grande carinho.

A minha esposa Karina pela paciência e compreensão.

Ao meu orientador com grande respeito e admiração.

Ao grupo do LENA.

À Educação.

À ciência.

## RESUMO

O erro de discretização é um dos tópicos que traz preocupação para usuários de mecânica dos fluidos e transferência de calor computacional durante a solução numérica de problemas. O erro que ocorre da conversão das equações que regem os modelos físicos de um domínio contínuo para o domínio discreto do espaço. Ele é reduzido e a acurácia dos cálculos é aumentada quando o parâmetro de malha  $h$  tende ao contínuo devido à solução numérica ser sensível a este espaçamento. No entanto, este procedimento de redução do erro de discretização é inversamente proporcional ao custo computacional, isto é, quanto menor  $h$ , maior é a acurácia e maior será o custo computacional. Uma ferramenta capaz de melhorar a acurácia da solução numérica sem aumentar o custo computacional é a múltipla extrapolação de Richardson (MER). Esta ferramenta para ser empregada eficientemente na redução do erro de discretização precisa ser ainda avaliada, aperfeiçoada e generalizada para o uso em problemas em mecânica dos fluidos e transferência de calor devido apresentar problemas de convergência em situações onde as soluções apresentam máximos e/ou mínimos. Para avaliar, aperfeiçoar e generalizar a ferramenta MER foram utilizados dois problemas clássicos em transferência de calor computacional governados pela equação de Laplace bidimensional e pela equação de Poisson unidimensional. Para a equação de Laplace, o domínio de cálculo é quadrado e discretizado com malhas uniformes. São obtidos resultados para variáveis principais e secundárias como a temperatura no centro do domínio, média do campo de temperaturas, taxa de transferência de calor em dois contornos e norma do erro de discretização. Para todas as variáveis desejadas dos experimentos são conhecidas as suas respectivas posições. A equação de Poisson unidimensional é discretizada com malha uniforme onde as variáveis desejadas são temperatura máxima e sua posição. É definido nesta tese o erro de posição que associado à interpolação e extrapolação de Richardson resulta em respostas numéricas extremamente acuradas. Mostra-se, portanto, que MER reduz significativamente o erro de discretização nos problemas numéricos de condução de calor, o estimador de erro de Richardson funciona para resultados numéricos obtidos com MER e os resultados mais efetivos com MER são obtidos usando precisão quádrupla nos cálculos, reduzindo o erro de posição por meio de interpolação, maior número de extrapolações, maior número de malhas e ordens do erro.

**Palavras-chave:** Erro de discretização. Solução numérica. Múltipla extrapolação de Richardson. Estimador de erro e erro de posição. Condução de calor.

## ABSTRACT

The discretization error is the biggest concern for a user of fluid mechanics and heat transfer in a computational numerical application. Error that occurs is the conversion of the equations governing the physical models in a continuous domain to discrete domain space. It is reduced and the accuracy of the calculations is increased when the mesh parameter  $h$  tends to continued due to the numerical solution is sensitive to spacing. However, this procedure of reducing the discretization error is inversely proportional to the computational cost. A tool to improve the accuracy of the numerical solution without increasing the computational cost is a repeated Richardson extrapolation (RRE). This tool to be used effectively in reducing the discretization error has to be evaluated, refined and generalized for use on problems in fluid mechanics and heat transfer due to present convergence problems in situations where the solutions have extreme local and / or global. To assess, improve and generalize the RRE tool we used two classic problems in computational heat transfer governed by the Laplace equation for two-dimensional and one-dimensional Poisson equation. For the Laplace equation calculation domain is discretized with square and uniform meshes. Results are obtained for primary and secondary variables with temperature in the center of the field, the average temperature field, and rate of heat transfer in two contours and standard error of discretization. For all interest variables of this experiment are known to their respective positions. For the one-dimensional Poisson equation is discretized with uniform mesh where the variables are desired maximum temperature and position. It is defined in this thesis that the position error associated with interpolation and Richardson extrapolation results in extremely accurate numerical results. It shows therefore that RRE significantly reduces the discretization error, the error estimator Richardson works for numerical results obtained with MER and the MER with more effective results are obtained using quadruple precision in the calculations, reducing the position error by interpolation, extrapolation of many, many orders of knitwear and correct the error.

**Keywords:** Discretization error. Numerical solution. Repeated Richardson Extrapolation. Error estimator. Position error. Heat transfer.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1. 1 - Formas de solucionar de problemas (Adaptado de Marchi, 2001).	21
Figura 2.1 - Definições dos parâmetros da serie de Taylor em uma malha unidimensional .	31
Figura 2.2 - Malha unidimensional. ....	33
Figura 2.3 - Malha unidimensional com 3 nós e comprimento $L_x = 1$ .	38
Figura 2.4 - Malha unidimensional com 5 nós e comprimento $L_x = 1$ .	38
Figura 2.5 - Malha unidimensional com 9 nós e comprimento $L_x = 1$ .	39
Figura 2.6 - Efeito qualitativo da redução do tamanho da manha $h$ em função do módulo do erro para uma determinada variável no domínio de cálculo.	41
Figura 2.7 – Malha bidimensional com 25 nós. ....	41
Figura 2.8 - Malha bidimensional com 81 nós. ....	42
Figura 2.9 - Malha bidimensional com 36 nós. ....	43
Figura 3.1 - Malha unidimensional com 3 nós e comprimento $L_x = 1$ .	56
Figura 3.2 – Máximo e mínimo da função $Y(x)$ .	57
Figura 3.3 – Máximo e mínimo da função $\Pi x$ .	59
Figura 3.4 - Discretização do domínio $[ 0, L ]$ em $(N)$ elementos. ....	60
Figura 3.5 – Erro de discretização do máximo da função $\Pi(x)$ .	61
Figura 3.6 – Máximo da função $Y(x)$ e da função $\Pi(x)$ .	62
Figura 3.7 – Erro de posição.	64
Figura 3.8 – Interpolação para obtenção da função contínua $\Omega(x)$ .	66
Figura 3.9 – Redução do erro de posição.	67
Figura 3.10 – Triangulo do erro de posição.	68
Figura 4.1 - Malha quadrada representando uma placa.	73
Figura 4.2 - Malha bidimensional com 25 nós.	76
Figura 4.3 - e.	84
Figura 4.4 - Comparativo entre o módulo do erro em precisão dupla e quádrupla para a variáveis $(T_2)$ versus tamanho da malha $(h)$ .	85
Figura 4.5 - Comparativo entre o módulo do erro em precisão dupla e quádrupla para a variáveis $(T_m)$ versus tamanho da malha $(h)$ .	85
Figura 4.6 - Comparativo entre o módulo do erro em precisão dupla e quádrupla para a variáveis $(L1)$ versus tamanho da malha $(h)$ .	86



Figura 4.7 - Comparativo entre o módulo do erro em precisão dupla e quádrupla para a variáveis ( $Q_e$ ) <i>versus</i> tamanho da malha ( $h$ ) .....	86
Figura 4.8 - Comparativo entre o módulo do erro em precisão dupla e quádrupla para a variáveis ( $Q_n$ ) <i>versus</i> tamanho da malha ( $h$ ) .....	87
Figura 4.9 - Módulo do erro da solução numérica das variáveis ( $T_C$ ) <i>versus</i> tamanho da malha $h$ em precisão dupla. ....	88
Figura 4.10 - Módulo do erro da solução numérica das variáveis ( $T_2$ ) <i>versus</i> tamanho da malha $h$ em precisão dupla. ....	88
Figura 4.11 - Módulo do erro da solução numérica das variáveis ( $T_m$ ) <i>versus</i> tamanho da malha $h$ em precisão dupla. ....	89
Figura 4.12 - Módulo do erro da solução numérica das variáveis ( $L1$ ) <i>versus</i> tamanho da malha $h$ em precisão dupla. ....	89
Figura 4.13 - Módulo do erro da solução numérica das variáveis ( $Q_e$ ) <i>versus</i> tamanho da malha $h$ em precisão dupla. ....	90
Figura 4.14 - Módulo do erro da solução numérica das variáveis ( $Q_n$ ) <i>versus</i> tamanho da malha $h$ em precisão dupla. ....	90
Figura 4.15 - Módulo do erro da solução numérica das variáveis ( $T_c$ ) <i>versus</i> tamanho da malha $h$ em precisão quádrupla. ....	92
Figura 4.16 - Módulo do erro da solução numérica das variáveis ( $T_2$ ) <i>versus</i> tamanho da malha $h$ em precisão quádrupla. ....	93
Figura 4.17 - Módulo do erro da solução numérica das variáveis ( $T_m$ ) <i>versus</i> tamanho da malha $h$ em precisão quádrupla. ....	93
Figura 4.18 - Módulo do erro da solução numérica das variáveis ( $L1$ ) <i>versus</i> tamanho da malha $h$ em precisão quádrupla. ....	94
Figura 4.19 - Módulo do erro da solução numérica das variáveis ( $Q_e$ ) <i>versus</i> tamanho da malha $h$ em precisão quádrupla. ....	94
Figura 4.20 - Módulo do erro da solução numérica das variáveis ( $Q_n$ ) <i>versus</i> tamanho da malha $h$ em precisão quádrupla. ....	95
Figura 4.21 - Erro ( $E$ ) das variáveis ( $T_C$ ) <i>versus</i> tamanho da malha ( $h$ ) e número de extrapolações ( $m$ ) em precisão quádrupla. ....	96
Figura 4.22 - Erro ( $E$ ) das variáveis ( $T_2$ ) <i>versus</i> tamanho da malha ( $h$ ) e número de extrapolações ( $m$ ) em precisão quádrupla. ....	96
Figura 4.23- Erro ( $E$ ) das variáveis ( $T_m$ ) <i>versus</i> tamanho da malha ( $h$ ) e número de extrapolações ( $m$ ) em precisão quádrupla. ....	97

Figura 4.24- Erro ( $E$ ) das variáveis ( $L1$ ) <i>versus</i> tamanho da malha ( $h$ ) e número de extrapolações ( $m$ ) em precisão quádrupla. ....	97
Figura 4.25- Erro ( $E$ ) das variáveis ( $Q_e$ ) <i>versus</i> tamanho da malha ( $h$ ) e número de extrapolações ( $m$ ) em precisão quádrupla. ....	98
Figura 4.26- Erro ( $E$ ) das variáveis ( $Q_n$ ) <i>versus</i> tamanho da malha ( $h$ ) e número de extrapolações ( $m$ ) em precisão quádrupla. ....	98
Figura 4.27 - Ordem efetiva ( $p_E$ ) para ( $T_c$ ) <i>versus</i> o tamanho da malha ( $h$ ) e número de extrapolações ( $m$ ). ....	99
Figura 4.28 - Ordem aparente ( $p_u$ ) <i>versus</i> o tamanho da malha ( $h$ ) e número de extrapolações ( $m$ ) para a variável ( $T_C$ ). ....	100
Figura 4.29 - Ordem aparente ( $p_u$ ) <i>versus</i> o tamanho da malha ( $h$ ) e número de extrapolações ( $m$ ) para a variável ( $T_2$ ). ....	101
Figura 4.30 - Ordem aparente ( $p_u$ ) <i>versus</i> o tamanho da malha ( $h$ ) e número de extrapolações ( $m$ ) para a variável ( $T_m$ ). ....	101
Figura 4.31 - Ordem aparente ( $p_u$ ) <i>versus</i> o tamanho da malha ( $h$ ) e número de extrapolações ( $m$ ) para a variável ( $L$ ). ....	102
Figura 4.32 - Ordem aparente ( $p_u$ ) <i>versus</i> o tamanho da malha ( $h$ ) e número de extrapolações ( $m$ ) para a variável ( $Q_e$ ). ....	102
Figura 4.33 - Ordem aparente ( $p_u$ ) <i>versus</i> o tamanho da malha ( $h$ ) e número de extrapolações ( $m$ ) para a variável ( $Q_n$ ). ....	103
Figura 5.1 – Refino de malha com ( $\epsilon D \neq 0$ ). ....	109
Figura 5.2 - Módulo do erro <i>versus</i> ( $h$ ) sem interpolação com $p_0=2$ e $dp_0=2$ . ....	110
Figura 5.3 - Módulo do erro <i>versus</i> ( $h$ ) sem interpolação com $p_0=2$ e $dp_0=2$ . ....	111
Figura 5.4 - Módulo do erro <i>versus</i> ( $h$ ) sem interpolação com $p_0=2$ e $dp_0=1$ . ....	112
Figura 5.5 – Refino de malha com ( $\epsilon D = 0$ ) ....	115
Figura 5.6 – Módulo do erro <i>versus</i> ( $h$ ) sem interpolação com $p_0=2$ e $dp_0=2$ sem erro de posição. ....	116
Figura 5.7 – Ordem efetiva ( $p_E$ ) <i>versus</i> o tamanho da malha ( $h$ ) e número de extrapolações ( $m$ ). ....	117
Figura 5.8 - Esquema de interpolação dos dados obtidos por Poisson_1Dp_3p1_64BITS . .	118
Figura 5.9 - Módulo do erro <i>versus</i> ( $h$ ) para interpolação de ordem 2 com $p_0=2$ e $dp_0=2$ . ....	121
Figura 5.10 - Módulo do erro <i>versus</i> ( $h$ ) para interpolação de ordem 2 com $p_0=2$ e $dp_0=2$ . ....	121
Figura 5.11 - Ordem efetiva ( $p_E$ ) <i>versus</i> o tamanho da malha ( $h$ ) e número de extrapolações ( $m$ ) para interpolação de ordem 2. ....	122

Figura 5.12 - Módulo do erro <i>versus</i> ( $h$ ) para interpolação de ordem 4 com $p_0=2$ e $dp_0=2$ ..	124
Figura 5.13 - Módulo do erro <i>versus</i> ( $h$ ) para interpolação de ordem 4 com $p_0=2$ e $dp_0=2$ ..	125
Figura 5.14 - Ordem efetiva ( $p_E$ ) para <i>versus</i> o tamanho da malha ( $h$ ) e número de extrapolações ( $m$ ) para interpolação de ordem 4. ....	126
Figura 5.15 - Módulo do erro <i>versus</i> ( $h$ ) com interpolação de ordem 10 com $p_0=2$ e $dp_0=2$ . ....	128
Figura 5.16 - Módulo do erro <i>versus</i> ( $h$ ) para interpolação de ordem 10 com $p_0=2$ e $dp_0=2$ . ....	129
Figura 5.17 - Ordem efetiva ( $p_E$ ) <i>versus</i> o tamanho da malha ( $h$ ) e número de extrapolações ( $m$ ) para interpolação de ordem 10. ....	130
Figura 5.18 - Módulo do erro <i>versus</i> ( $h$ ) para diversas interpolações com $p_0=2$ e $dp_0=2$ . ....	132
Figura 5.19 - Módulo do erro <i>versus</i> ( $h$ ) para diversas interpolações com $p_0=2$ e $dp_0=2$ . ....	132

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Valores estimados para as ordens verdadeira e assintótica (MARCHI, 2001)....	35
Tabela 3.1 – Índices das soluções numéricas sem extrapolação. ....	49
Tabela 3.2 – Índices das múltiplas extrapolações de Richardson.....	50
Tabela 4.1 – Valores numéricos obtidos para as variáveis $T_C$ , $T_2$ , $T_m$ , $Q_e$ e $Q_n$ com precisão dupla. ....	79
Tabela 4.2 - Valores numéricos obtidos para as variáveis $T_C$ , $T_2$ , $T_m$ , $Q_e$ e $Q_n$ com precisão quádrupla. ....	79
Tabela 4.3 – Iterações Externas para atingir o erro de arredondamento de máquina.....	81
Tabela 4.4 – Cálculo da diferença entre precisão dupla e quádrupla para a variável ( $T_C$ ). ....	82
Tabela 4.5 – Análise do Custo Computacional para a variável ( $T_C$ ). ....	92
Tabela 4.6 – Comparação entre as ordens aparentes do erro de discretização obtidas <i>a priori</i> e <i>a posteriori</i> . ....	103
Tabela 5.1 – Tendência da Ordem efetiva ( $p_E$ ) para a variável ( $T_{max}$ ) de ( $E_h$ ) e ( $E_{mer}$ ) em função de ( $h$ ). ....	113
Tabela 5.2 – Tendência da Ordem efetiva ( $p_E$ ) para a variável ( $x_{max}$ ) de ( $E_h$ ) e ( $E_{mer}$ ) em função de ( $h$ ). ....	114
Tabela 5.3 – Redução do erro para malhas fixas para ( $T_{max}$ ) com interpolação de 10 <sup>a</sup> ordem. ....	133
Tabela 5.4 – Redução de nós de malha para erros fixos para ( $T_{max}$ ) com interpolação de 10 <sup>a</sup> ordem. ....	133

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

<i>BEM</i>	Método dos Elementos de Contorno ou <i>Boundary Element Method</i> .
<i>CDS</i>	<i>Central Differencing Scheme</i> .
<i>CFD</i>	<i>Computational Fluid Dynamics</i> .
<i>CPU</i>	Unidade Central de Processamento ou <i>Central Processing Unit</i> .
<i>DDS</i>	<i>Downstream Differencing Scheme</i> .
EDO	Equação Diferencial Ordinária.
ER	Extrapolação de Richardson ou <i>Richardson Extrapolation (RE)</i> .
<i>FDM</i>	Método das Diferenças Finitas ou <i>Finite Difference Method</i> .
<i>FEM</i>	Método dos Elementos Finitos ou <i>Finite Element Method</i> .
<i>FVM</i>	Método dos Volumes Finitos ou <i>Finite Volume Method</i> .
MER	Múltiplas Extrapolações de Richardson ou <i>Repeated Richardson Extrapolation (RRE)</i> .
<i>TDMA</i>	<i>TriDiagonal Matrix Algorithm</i> .
<i>UDS</i>	<i>Upwind Differencing Scheme</i> .
Re	Número de Reynolds.
<i>RED</i>	Redução do erro discretização.
<i>TCC</i>	Transferência de Calor Computacional ou <i>Computational Heat Transfer (CHT)</i> .
<i>TDMA</i>	<i>TriDiagonal Matrix Algorithm</i> .
<i>UDS</i>	<i>Upwind Differencing Scheme</i> .

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Romanos

$a$	ponto de máximo da função contínua.
$b$	ponto de máximo da função discreta.
$A$	Conjunto numérico.
$c$	coeficiente do grau do polinômio interpolador.
$C$	coeficiente do erro de discretização.
$\mathbb{C}$	números complexos.
$E$	erro.
$e$	expoente.
$f$	função.
$g$	nível da malha.
$G$	número de malha.
$h$	distância entre dois nós consecutivos.
$i$	nós na direção $x$ .
$j$	nós na direção $y$ .
$k$	nós da malha.
$K$	coeficiente da ordem aparente.
$L$	comprimento do domínio na coordenada.
$L$	norma.
$m$	nível de extrapolações de Richardson.
$m$	equações.
$N$	número de nós.
$n$	incógnitas.
$n$	grau do polinômio interpolador.
$\mathbb{R}$	números reais.
$R$	raio de convergência da série de Taylor.
$r$	razão de refino.
$s$	derivadas da serie de Taylor.
$S$	limite das derivadas do polinômio de Taylor.
$p$	ordens do erro de discretização.
$Q$	taxa de transferência de calor.

$T$	Temperatura.
$U$	estimador de Richardson.
$X$	matriz dos coeficientes.
$x$	direção coordenada x.
$Y$	matriz dos termos independentes.
$y$	direção coordenada y.
$z$	direção coordenada z.

### **Símbolos**

$O$	Ômicron.
$\rightarrow$	tende.
$\infty$	infinito.
$\varepsilon$	erro.
$\phi$	conjunto de soluções de qualquer variável de interesse.
$\Phi$	solução analítica exata para qualquer variável de interesse.
$\lambda$	aproximação numérica.
$f$	função.
$\zeta$	intervalo da série de Taylor associado a uma função.
$!$	fatorial.
$\Upsilon$	função de uma variável.
$\mathfrak{F}$	funções de várias variáveis.
$\Theta$	taxa de convergência.
$\varpi$	sistema coordenado.
$\Pi$	função discreta.
$\Omega$	função de interpolação.

### **Índices subscritos**

1,2,3,..	índices.
$\pi$	arredondamento.
$n$	iteração.
$prog$	programação.
$h$	discretização.
$D$	posição.

$h\nu$	discretização verdadeiro.
$\min$	mínimo.
$\max$	máximo.
$u$	aparente.
$E$	efetiva.
$m$	verdadeira.
$0$	assintótica.
$?$	incerteza.

### **Índices sobrescritos**

$n$	espaço dimensional.
$i, ii, iii, \dots$	derivada primeira, derivada segunda e derivada terceira.



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>19</b>
1.1	DEFINIÇÕES .....	23
1.1.1	Erros numéricos .....	23
1.1.2	A redução do erro de discretização com MER .....	25
1.2	MOTIVAÇÃO .....	26
1.3	OBJETIVOS .....	27
1.3.1	Objetivo geral .....	27
1.3.2	Objetivos específicos .....	27
1.4	PROBLEMA .....	28
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTOS .....</b>	<b>29</b>
2.1	FUNÇÕES .....	29
2.1.1	Funções de uma única variável .....	30
2.1.2	Funções de várias variáveis .....	30
2.1.3	Função discreta .....	30
2.1.4	Série e polinômio de Taylor .....	31
2.2	APROXIMAÇÕES E ORDEM DO ERRO A PRIORI .....	32
2.3	ERRO DE DISCRETIZAÇÃO E SUA ESTIMATIVA .....	34
2.4	CARACTERÍSTICAS DO REFINO DA MALHA .....	36
2.5	TAXA DE CONVERGÊNCIA .....	43
2.6	EXTRAPOLAÇÃO DE RICHARDSON .....	44
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA PARA APLICAÇÃO DE MÚLTIPLAS EXTRAPOLAÇÕES DE RICHARDSON - MER.....</b>	<b>48</b>
3.1	METODOLOGIA PARA MÚLTIPLAS EXTRAPOLAÇÕES DE RICHARDSON .....	49
3.1.1	Ordem efetiva .....	50
3.1.2	Ordem aparente .....	52
3.1.3	Estimador de erro de Richardson .....	54
3.2	METODOLOGIA PARA CORREÇÃO DAS SOLUÇÕES NUMÉRICAS SEM EXTRAPOLAÇÃO .....	55

3.2.1	Máximo e mínimo de uma função .....	57
3.2.2	Discretização do Domínio de Cálculo .....	59
3.2.3	Erro de discretização no ponto de máximo e/ou mínimo .....	60
3.2.4	Erro de Posição .....	62
3.2.5	Redução do erro de posição .....	65
3.2.6	Interpolação polinomial .....	69
3.2.6.1	Interpolação polinomial quadrática .....	70
3.2.6.2	Interpolação polinomial de grau $n > 2$ .....	71
<b>4</b>	<b>EQUAÇÃO DE LAPLACE BIDIMENSIONAL .....</b>	<b>73</b>
4.1	MODELO MATEMÁTICO .....	74
4.2	MODELO NUMÉRICO .....	75
4.3	METODOLOGIA .....	78
4.4	RESULTADOS .....	79
4.4.1	Efeito da precisão dos cálculos das soluções numéricas .....	82
4.4.2	Estimativa do erro de discretização .....	87
4.4.3	Verificação das ordens do erro .....	99
4.5	CONCLUSÃO .....	103
<b>5</b>	<b>EQUAÇÃO DE POISSON UNIDIMENSIONAL .....</b>	<b>105</b>
5.1	MODELO MATEMÁTICO .....	105
5.2	MODELO NUMÉRICO .....	107
5.3	METODOLOGIA .....	107
5.4	RESULTADOS OBTIDOS .....	108
5.4.1	Interpolação polinomial em Poisson unidimensional com MER .....	117
5.4.2	Aplicação de MER por meio de interpolação de segunda ordem .....	120
5.4.3	Aplicação de MER por meio de interpolação de quarta ordem .....	123
5.4.4	Aplicação de MER por meio de interpolação de décima ordem .....	127
5.4.5	Comparação dos resultados .....	131
5.4.6	Redução e estimativa do erro .....	133
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES .....</b>	<b>134</b>
6.1	CONCLUSÃO GERAL .....	134
6.2	RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....	136
6.3	CONTRIBUIÇÃO AO ESTADO DA ARTE .....	136

## 1 INTRODUÇÃO

A Transferência de Calor Computacional ou *Computational Heat Transfer (CHT)* é a análise de sistemas, envolvendo transferência de calor, por meio de simulação em computador (VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007). É a área da computação científica que estuda métodos computacionais para simulação de fenômenos de transferência de calor reduzindo o número de experimentos práticos, explorando fenômenos que não podem ser estudados em laboratório de forma prática (FORTUNA, 2000). *CHT* possui importância inquestionável no desenvolvimento industrial e na pesquisa, pela possibilidade de reduzir o tempo e o custo dos projetos.

A condução de calor é um modo de transferência de calor. A troca de energia tem lugar da região de alta temperatura para a de baixa temperatura pelo movimento cinético ou pelo impacto direto de moléculas, no caso de fluidos em repouso, e pelo movimento de elétrons, no caso dos metais (HOLMAN, 1998).

A condução de calor é um fenômeno natural que ocorre no meio ambiente e nos organismos vivos e o que está constantemente sendo investigado por cientistas e engenheiros para novas descobertas.

A aplicação da condução de calor é extremamente importante no projeto e desenvolvimento de aeronaves, foguetes, turbinas, motores para automóveis, entre outros. Para acompanhar os novos projetos em transferência de calor computacional sempre há necessidade de desenvolver técnicas capazes de utilizar as teorias da física e matemáticas capazes de promover respostas mais acuradas com menor custo e em menor tempo.

Entretanto, um breve resumo sobre as formas de solução de problemas em engenharia é necessário para situar a transferência de calor computacional ou a condução de calor computacional neste contexto. Existem, basicamente, três técnicas sendo eles o método experimental, o analítico e o numérico (TANNEHILL *et al.*, 1997).

Para exemplificar, Marchi (2001) apresenta um fluxograma detalhado na Fig. 1.1 que mostra as formas de solução de problemas e seus métodos. A solução de problema inicia-se com o fenômeno físico tal como se observa na natureza. Após a definição do problema, opta-se por resolvê-lo de forma experimental ou de forma teórica dependendo dos recursos financeiros, equipamentos e mão de obra disponível.

Quando o problema é resolvido de forma experimental, desenvolvem-se modelos em tamanho real ou em escala, a fim de que seja possível instalar a instrumentação para definir os parâmetros necessários, com vistas ao entendimento e à geração da solução do problema e

assim definir os parâmetros de projeto. Os resultados experimentais podem auxiliar os métodos teóricos na definição de constantes e comprovar a validade do equacionamento estudado. É por esse motivo que na Fig. 1.1 existe uma seta de ligação entre os resultados experimentais e a seta que liga o fenômeno, que se quer estudar, aos métodos teóricos.

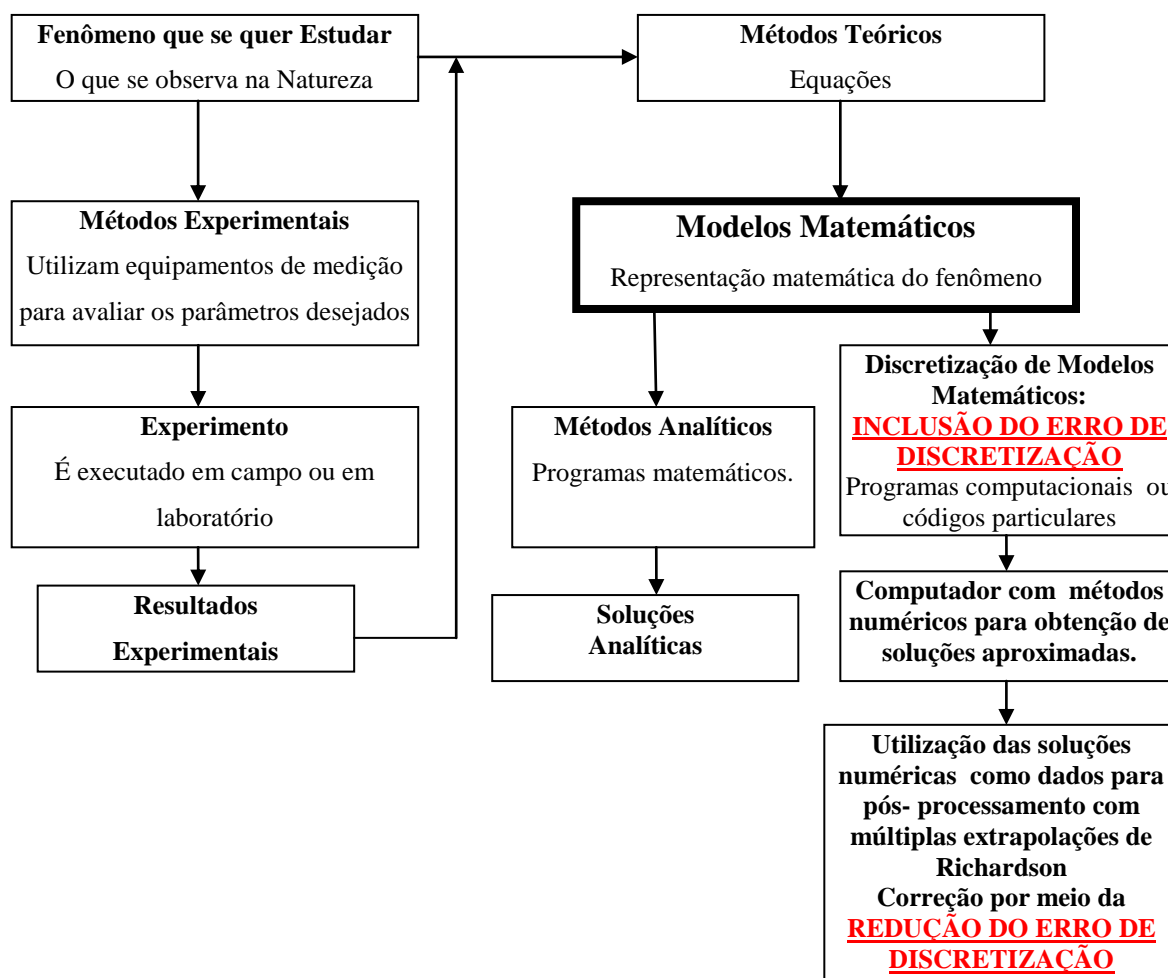
Quando resolvido da forma teórica, é utilizado o equacionamento matemático para obter soluções. Entretanto, há equacionamentos que não são resolvíveis de forma analítica. Uma alternativa é resolver de forma numérica por meio de soluções aproximadas.

Na Fig. 1.1 é mostrado que os modelos matemáticos podem ser resolvidos por métodos analíticos e numéricos. Para um mesmo problema e mesmo modelo matemático, as soluções obtidas por método analítico são mais precisas que as resolvidas pelos métodos numéricos. A diferença está no fato de haver erros da solução numérica em virtude do truncamento dos termos da equação ao aproximá-la. Este fenômeno é chamado de erro de truncamento. Outros erros associados a utilização dos métodos numéricos são o erro de iteração causado pelo processo iterativo das soluções numéricas, o erro de arredondamento devido à representação finita dos números e o erro de programação gerado pela falha no desenvolvimento do programa computacional. Para corrigir estes erros dos programas numéricos utilizam-se as soluções analíticas ou soluções chamadas “*Benchmark*” como parâmetro para efetivar as correções nos programas numéricos, caso houver. Quando o erro da solução numérica é composto somente por erros de truncamento este passa a se chamar erro de discretização.

Um engenheiro ou um cientista possui diversas formas de solucionar seus problemas de forma numérica utilizando:

- Programas computacionais comerciais: são programas prontos como PHOENICS®, FLUENT®, FLOW3D® e STAR-CD® que possibilitam solucionar os problemas desejados. Neste caso, os programas computacionais comerciais possuem restrição de acesso ao seu código fonte e não permite alterações significativas. A estimativa de erro que o programa calcula normalmente não é informada e as exigências de memória e de armazenamento são impositivas sendo imprescindível a configuração mínima do computador.
- Os programas matemáticos: são programas como MATLAB® e MAPLE® sendo ferramentas matemáticas que possuem rotinas estabelecidas e auxiliam no cálculo numérico. Embora não dedicadas exclusivamente a problemas de condução de calor, essas ferramentas possibilitam, em alguns casos, solucioná-los. São flexíveis, entretanto, demandam tempo para inserção dos dados e devida execução.

- Códigos particulares e não comerciais: são programas gerados em FORTRAN®, C® ou C++® ou outro *software* de desenvolvimento. Os programas são elaborados para um determinado problema. É possível torná-los flexíveis, rápidos e precisos.



**Figura 1. 1 - Formas de solucionar de problemas (Adaptado de Marchi, 2001).**

Os métodos numéricos são utilizados em problemas independentemente da complexidade, da geometria e dos parâmetros físicos. Não há restrição de linearidade e pode ser considerada a evolução temporal durante o processo. São capazes de resolver problemas complexos nas áreas das engenharias mecânica, elétrica, naval, eletrônica, espacial e outras. São aplicados para promover soluções aproximadas dos equacionamentos matemáticos. As principais desvantagens dos métodos numéricos estão na determinação do erro computacional, na prescrição apropriada das condições de contornos e nos custos computacionais (TANNEHILL *et al.*, 1997). São empregados para tanto diversos métodos como:

- Método diferenças finitas ou *Finite Difference Method (FDM)*.
- Método elementos finitos ou *Finite Element Method (FEM)*.
- Método volumes finitos ou *Finite Volume Method (FVM)*.
- Método elementos de contorno ou *Boundary Element Method (BEM)*.

Ao contrário dos métodos numéricos, os métodos analíticos somente conseguem obter soluções se a geometria for simples. As idealizações em problemas complexos tornam os resultados analíticos distantes dos reais, em virtude da dificuldade de o analista resolver as equações sem fazer considerações simplificadoras do modelo estudado. Uma alternativa para problemas complexos é utilizar as técnicas numéricas. Essas técnicas têm avançado bastante com o avanço da tecnologia. Os custos computacionais têm diminuído em função dos desenvolvimentos das tecnologias dos computadores e dos programas computacionais (DEITEL *et al.*, 2001)

A transferência de calor computacional também é beneficiada em função do desenvolvimento da tecnologia devido à acessibilidade a computadores e programas que promovem o desenvolvimento de novas técnicas computacionais. Para este assunto, há uma vasta literatura sobre as técnicas numéricas como por exemplos os livros de Grégoire (2007), Collins (2003), Chapra e Canale (1998) e Isaacson e Keller (1994) que discutem métodos capazes de resolver numericamente problemas em engenharia. A escolha do método numérico a utilizar deve levar em consideração a exigência do problema estudado. Segundo Broadie e Detemple (1996), a escolha do método numérico deve partir do equilíbrio das seguintes questões:

- Precisão numérica.
- Tempo necessário para a execução.
- Estimativa de erro.
- Flexibilidade.
- Exigências de memória e de armazenamento.

No entanto, mesmo com os avanços tecnológicos em computadores e dos métodos numéricos, para equilibrar todos os quesitos citados por Broadie e Detemple (1996), há a necessidade de simplificações em muitos modelos matemáticos de problemas físicos da atualidade. O motivo pelo qual isto ocorre é o de haver limitações de computadores em

termos de memória, armazenamento de dados, velocidade de processamento e dos métodos numéricos relativos principalmente à acurácia e ao erro do método. Consequentemente, para a obtenção de respostas mais acuradas é necessário executar mais cálculos em computadores e, com isso, dispensar mais tempo de processamento para alcançar os objetivos desejados.

Novos algoritmos e métodos numéricos mais avançados estão em constante desenvolvimento (MELO Jr., 2005), visando melhorar a precisão numérica e a redução do tempo de processamento. Os métodos numéricos em engenharia, mais especificamente em engenharia mecânica, têm uma grande importância devido ao fato de serem, em muitos casos, a única forma de resolver as equações que regem muitos dos fenômenos físicos estudados.

## 1.1 DEFINIÇÕES

### 1.1.1 Erros numéricos

Para resolver um problema computacionalmente, o domínio matemático, antes contínuo, é transformado em um domínio discreto no mesmo intervalo. O conjunto de pontos do domínio discreto é chamado de malha, e seus pontos, de nós (ANDERSON, 1995). A distância entre dois nós consecutivos é definida como tamanho da malha ( $h$ ), e o seu refino significa que o número de nós aumenta e o tamanho ( $h$ ) diminui. Quando ( $h$ ) é constante em todo o seu o domínio, chama-se de malhas uniformes; quando tal não ocorre, têm-se as chamadas malhas não-uniformes.

As derivadas das equações dos modelos matemáticos são aproximadas originando uma equação discretizada. Os números de pontos da malha considerados nestas aproximações definem o esquema de aproximação podendo este ser de primeira, segunda, terceira ou de mais alta ordem. Espera-se que quanto maior a ordem do esquema de aproximação, maior será o custo computacional, porém mais acurado será o resultado.

As equações discretizadas são aproximações das equações diferenciais do modelo matemático. À medida que o tamanho da malha é reduzido, o erro de discretização diminui. As equações discretizadas com as devidas condições de contorno formam um sistema de equações que são resolvidas, por exemplo, por métodos iterativos ou em alguns casos por métodos diretos como TDMA.

Portanto, pode-se afirmar que é intrínseco dos métodos numéricos gerarem respostas aproximadas dos problemas resolvidos devido à introdução de erros motivados pela sua concepção básica. A diferença entre a solução analítica ( $\Phi$ ) e a sua solução numérica ( $\phi$ ) é definido como erro numérico  $E(\phi)$  (FERZIGER e PERIC, 2002)

$$E(\phi) = \Phi - \phi . \quad (1.1)$$

As principais fontes de erros numéricos caracterizados pela Eq. (1.1) são erros de discretização, iteração, arredondamento e programação que podem ser representados respectivamente por

$$E(\phi) = f(E_h, E_n, E_\pi, E_{prog}, \dots) . \quad (1.2)$$

O erro de discretização ( $E_h$ ) para malhas ortogonais é devido ao truncamento da Série de Taylor para a aproximação das derivadas. Este erro é reduzido aumentando a ordem da discretização ou diminuindo o parâmetro ( $h$ ) da malha. Isso tem um custo que está relacionado com o aumento do tempo de processamento. Para Oberkampf e Blottner (1997) o erro de discretização é aquele causado pela discretização das equações diferenciais dos modelos físicos. No entanto, o erro de discretização pode ser isolado se as outras fontes de erros forem inexistentes. Para Marchi e Silva (2005) o erro de discretização ( $E_h$ ) é a diferença entre a solução analítica do modelo matemático ( $\Phi$ ) e a solução numérica das equações discretizadas ( $\phi_h$ ) com somente o erro de discretização. Para isto ser verdade, as outras fontes de erros como o de iteração, o de arredondamento e o de programação são consideradas inexistentes, isto é,  $E_n = 0$ ,  $E_\pi = 0$  e  $E_{prog} = 0$ . Portanto, a Eq. (1.2) com a Eq. (1.1) resultam em

$$E_h(\phi) = E_h = \Phi - \phi_h . \quad (1.3)$$

O índice ( $h$ ) significa que a fonte do erro vem exclusivamente da discretização do modelo matemático. Quando isto acontece tem-se

$$E_h(\phi) = C_0 h^{p_0} + C_1 h^{p_1} + C_2 h^{p_2} + C_3 h^{p_3} \dots , \quad (1.4)$$

onde ( $C_0$ ), ( $C_1$ ), ( $C_2$ ), ( $C_3$ )... são coeficientes que dependem de ( $\Phi$ ) e suas derivadas, bem como das variáveis independentes, mas independem de ( $h$ ). Os índices ( $p_0$ ), ( $p_1$ ), ( $p_2$ ), ( $p_3$ )...



são as ordens verdadeiras de  $E_h(\phi)$  cujo conjunto é representado por  $p_v$  (MARCHI *et al.*, 2008).

O erro de iteração ( $E_n$ ) é a diferença entre a solução exata das equações discretizadas e a solução numérica em uma determinada iteração (FERZIGER e PERIC, 2002) em uma mesma malha, sem erros de arredondamentos.

O erro de arredondamento ( $E_\pi$ ) é o erro que ocorre principalmente devido à representação finita dos números reais. Este erro aumenta com a redução do tamanho da malha (MARCHI, 2001).

O erro de programação ( $E_{prog}$ ) consiste em erro de lógica e pelo operador. É difícil de diagnosticar, pois contém códigos sintática e semanticamente corretos. Este erro faz com que a resposta numérica do programa se distancie da resposta analítica. É uma falha do programador e pode ser corrigida com o trabalho de análise do código computacional.

### 1.1.2 A redução do erro de discretização com MER

Para Stern *et al.* (2001), com a complexidade e a responsabilidade das simulações numéricas em engenharia nas últimas décadas é necessário que as simulações efetuadas possuam credibilidade. Portanto, como aumentar a credibilidade das simulações numéricas? A resposta a questão é simples, isto é, reduzir os erros numéricos e fazer estimativa do erro envolvido nas soluções apresentadas.

A maneira apresentada nesta tese, capaz de aumentar a credibilidade das simulações numéricas, é reduzindo o erro  $E(\phi)$  com a redução exclusiva do erro de discretização  $E_h(\phi)$ . A escolha do estudo do erro de discretização é motivada pelo fato que as outras fontes de erros podem ser minorados utilizando precisão dupla ou quádrupla, atenção e utilização correta das equações nos desenvolvimentos dos códigos computacionais e aumento do número de iterações.

Em geral, os erros de discretização não podem ser evitados e sim reduzidos. A forma mais comum de reduzir o erro de discretização é selecionar cuidadosamente os esquemas de discretização que possuem um menor erro conhecido *a priori*. Entretanto, com o aumento da ordem do esquema de discretização o custo computacional também é elevado.

Outra forma de obter a redução do erro de discretização é por meio do método de extrapolação de Richardson (ER) na qual possui baixo custo operacional e computacional devido utilizar baixas ordens do esquema de discretização. A técnica utiliza como dados de

entrada as soluções numéricas geradas a partir de diversos métodos como, por exemplo, *FDM*, *FEM*, *FVM* e *BEM*.

A Para Burden e Faires (2003), a extrapolação de Richardson ou Richardson *Extrapolation* (RE) é utilizada para gerar resultados com alta acurácia, ainda que com aproximações de baixa ordem. Para Grasselli e Pelinovsky (2008) ER é um algoritmo capaz de melhorar a acurácia numérica por meio do cancelamento de termos do erro de truncamento. Moin (2010) define a extrapolação de Richardson com uma técnica poderosa capaz de obter soluções mais precisas. A eficácia desta técnica pode ser melhorada. Ela deve ser aplicada repetidas vezes, isto é, extrapolação sobre extrapolação. Isto é conhecido como múltiplas extrapolações de Richardson (MER) ou *repeated Richardson extrapolation* (RRE). Alguns trabalhos como Richardson e Gaunt (1927), Benjamin e Denny (1979), Schreiber e Keller (1983) e Erturk *et al.*, (2005) são exemplos de textos que tratam da extrapolação de Richardson.

## 1.2 MOTIVAÇÃO

A extrapolação de Richardson é uma técnica aplicada para melhorar os resultados de aproximações desde que os erros associados a estes resultados sejam previsíveis e dependam de parâmetros específicos e conhecidos. As soluções numéricas são aproximações dos resultados e dependem de um conhecido parâmetro chamado de tamanho de malha ( $h$ ).

No entanto, na literatura não há uma única opinião sobre a efetividade da técnica da extrapolação de Richardson. O trabalho escrito por Zlatev *et al.* (2011) mostra significantes redução do erro utilizando as equações de advecção com esquema de Crank-Nicolson combinada com a extrapolação de Richardson.

Por outro lado, Shyy *et al.* (2010) aplicou a extrapolação de Richardson em problemas da cavidade quadrada de fluxo bidimensionais em regime laminar com  $Re = 100$  e  $1000$ , e em regime turbulento com  $Re = 10 \times 10^6$  e obteve soluções com RE sem ganho de redução do erro em comparação com as soluções obtidas diretamente a partir de refinamento da malha.

Marchi *et al.* (2009) testou também a técnica para o problema de fluxo no interior de uma cavidade quadrada com e sem extrapolações Richardson e constatou que as respostas obtidas com RE não eram eficazes para as variáveis velocidade máxima e velocidade mínima em comparação com as respostas sem RE.

Outros autores como Wang e Zhang (2009), Soroushian *et al.* (2009) e Sun e Zhang (2004) aplicaram a extrapolação de Richardson nas equações reação-difusão bidimensional,

nas equações de vibração massa-mola e difusão-convecção com sucesso e obtiveram respostas com elevada eficiência, baixo custo computacional comparativamente sem o uso da técnica.

Modificações na formulação tradicional da extrapolação de Richardson fazem com que a técnica seja utilizada como estimador de erro de Richardson. É uma forma de estimar e reduzir os erros das simulações numéricas (VENDITTI e DARMOFAL, 2000), além de ser um item essencial para melhorar a confiabilidade das simulações computacionais (FIDKOWSKI e DARMOFAL, 2011). Textos com o de Roache (1997), Roache (1994) mostram a importância de usar os estimadores e indicam a estimador baseado em extrapolação de Richardson.

### 1.3 OBJETIVOS

#### 1.3.1 Objetivo geral

O objetivo geral desta tese é avaliar, aperfeiçoar e generalizar o uso de múltiplas extrapolações de Richardson (MER), capaz de reduzir e estimar o erro de discretização em condução de calor. Busca-se, com isso, diminuir a memória computacional, tempo de uso unidade central de processamento ou *Central Processing Unit (CPU)* necessários para solução de problemas de *CHT* e fazer estimativas confiáveis e acuradas do erro numérico.

#### 1.3.2 Objetivos específicos

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- Desenvolver a teoria de MER, melhorando o desempenho de MER em variáveis de campo como temperatura média e temperatura no centro do domínio devido à falta de efetividade no assunto com base na literatura consultada.
- Desenvolver a teoria de MER, melhorando o desempenho de MER em variáveis de campo que têm extremos locais ou globais e suas coordenadas devido à falta de efetividade demonstrado nos trabalhos desenvolvidos por Shyy *et al.*(2010) e Marchi *et al.* (2009).
- Desenvolver um estimador de erro para soluções obtidas com MER como sugerido nos trabalhos de Fidkowski e Darmofal (2011), Venditti e Darmofal (2000), Roache (1997), Roache (1994).

## 1.4 PROBLEMA

Esta pesquisa concentra-se no estudo da técnica de múltiplas extrapolações de Richardson (MER) utilizada para reduzir e estimar o erro de discretização. Verifica-se que a aplicação de MER para reduzir o erro de discretização das variáveis de interesse tem demonstrado ineficiência em problemas em que há máximos e/ou mínimos e não tem produzido resultados mais acurados como esperado. A aplicabilidade do método exige soluções suaves. Para tanto, soluções com descontinuidades ou singularidades reduz a eficácia do método (ROY, 2005). Para compreender, aperfeiçoar e generalizar o uso de MER nestas situações e torná-lo eficiente na redução do erro de discretização foram utilizados dois modelos que são representados pelas seguintes equações:

- Equação de Laplace bidimensional.
- Equação de Poisson unidimensional.

Estas equações diferenciais modelam nesta tese a condução de calor e geram, após discretizadas, em seu domínio de cálculo, resultados das variáveis de interesse com características diferentes entre si. As equações escolhidas são do tipo elípticas e foram escolhidas devido mostrarem regular em suas respostas. Por meio destes resultados será possível compreender os efeitos de MER e assim sistematizar o seu aperfeiçoamento e sua generalização para este tipo de problema.

## 2 FUNDAMENTOS

Este capítulo introduz os conceitos que regem o erro de discretização e para isto parte-se do princípio que será necessário resolver uma equações diferenciais. Estas equações podem envolver derivadas de uma função de uma só variável dependente ou funções de mais de uma variável dependente. Porém, quando a solução é analítica, a função resultante não possui derivadas ou diferenciais sendo também contínua para o intervalo estudado. Além disso, satisfaz a equação diferencial dada. Por outro lado, quando a solução é numérica, as derivadas das equações diferenciais são aproximadas por um determinado tipo de método de e a solução é uma função discreta que depende dos números de nós da malha.

Nesta tese, somente o método por diferenças finitas é utilizado, e por isto, este capítulo também conceitua o método. Ele basea-se no truncamento da série de Taylor para aproximar as derivadas das equações diferenciais. Porém, quando se faz esta simplificação na série, ela se torna um série com termos finitos, isto é, um polinômio. O nome polinômio de Taylor é devido haver um número finito de termos e, por isso, insere na equação discretizada erros de truncamento da série de Taylor para todas as derivadas da equação diferencial. O erro associado ao equação discretizada chama-se erro de discretização.

### 2.1 FUNÇÕES

A ferramenta básica do cálculo é o conceito de função. Kline (1972) apresenta um histórico do conceito de função, introduzido inicialmente com os trabalhos de Newton<sup>1</sup> de 1665, que usou o termo *fluent* para representar alguma relação entre variáveis. No manuscrito *Methodus tangentium inversa seu de functionibus* de Leibniz<sup>2</sup> (1673), é utilizada a palavra *function* para representar qualquer quantidade variando de um ponto para outro da curva. Leibniz, em *Mathematische Schriften, Abth. 2 Band I* (1858, p. 266-269), apresenta uma coleção de termos técnicos com as palavras *evolutio*, *differentiare*, *parameter*, *differentiabilis*, *functio*, *ordinata e abscissa* (*apud* STRUIK, 1969). Em 1697, trabalhando com funções, Bernoulli<sup>3</sup> falou sobre quantidade formada de variáveis e constantes. Ele adaptou a expressão de Leibniz *function of* ( $x$ ) para essa quantidade, em 1698. Em 1714, Leibniz usou a palavra *function* significando quantidades que dependem de uma variável. A respeito da notação,

---

<sup>1</sup> Isaac Newton (1643-1727).

<sup>2</sup> Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

<sup>3</sup> John Bernoulli (1667-1748).

Bernoulli escreveu  $(X)$  ou  $(\xi)$  para uma função geral de  $(x)$ , embora em 1718 mudasse para  $(\phi x)$ . A notação  $f(x)$  foi introduzida por Euler<sup>4</sup> em 1734.

### 2.1.1 Funções de uma única variável

Munem e Foulis (1982) definem a função contínua de uma única variável  $(f)$  como uma regra ou uma correspondência que faz associar um e somente um valor da variável  $(Y)$  para cada valor de variável  $(x)$ , definido por,

$$Y = f(x) \quad . \quad (2.1)$$

Uma função de uma única variável é um conjunto de pares ordenados definidos por  $(x, y)$ . O gráfico de uma função é o conjunto de todos os pontos  $(x, y)$  no plano  $xy$ .

### 2.1.2 Funções de várias variáveis

Gonçalves e Flemming (2007) definem a função contínua de várias variáveis como sendo um conjunto  $A$  de  $n$ -uplas ordenadas  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de números reais do espaço  $n$ -dimensional  $(A \subseteq \mathbb{R}^n)$ . Se a cada ponto  $(a)$  do conjunto  $(A)$  se associar a um único elemento de  $\mathbb{R}$ , temos uma função  $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$y = f(a). \quad (2.2)$$

### 2.1.3 Função discreta

A função discreta é uma forma que o computador consegue processar as informações. Trabalha sempre com números inteiros ou com uma aproximação de um número real, chamado de ponto flutuante e, por isso, não é possível representar uma função contínua. Pode sim apenas simulá-la. O processo de representar uma função contínua no computador é chamado de discretização da função contínua, ou seja, toma-se valores pontuais ao longo de uma coordenada e guarda o seu valor correspondente (SCURI, 2002). A função discreta  $(\Pi)$ , portanto, é a uma aproximação da função contínua  $(Y)$  definida como

---

<sup>4</sup> Leonhard Paul Euler (1707-1783).

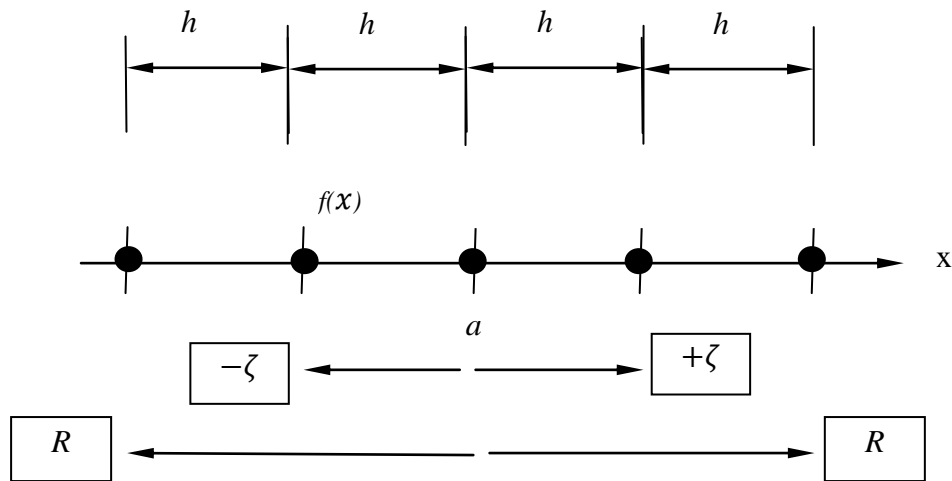
$$\Pi \sim \Upsilon. \quad (2.3)$$

### 2.1.4 Série e polinômio de Taylor

Seja uma função ( $f$ ) contínua com infinitas ordens de derivadas  $s$  em um intervalo que está incluso ( $a$ ) como um ponto interno a este intervalo. A série de Taylor associada a uma função infinitesimal derivável  $f(\varpi)$  é a série de potências (TÁBOAS, 2008) definida por

$$f(\varpi) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{f^s(a)}{s!} (\varpi - a)^s = f(a) + f^{(i)}(a)(\varpi - a) + \frac{f^{(ii)}(a)}{2!} (\varpi - a)^2 + \dots, \quad (2.4)$$

onde ( $\varpi$ ) é o sistema coordenado ( $x$  ou  $y$ ), a constante ( $a$ ) é o centro da série que pode ser uma função real ou complexa em um intervalo aberto ( $a - \zeta, a + \zeta$ ). ( $\zeta$ ) é a distância onde será avaliado  $f(\varpi)$  e  $(\varpi - a) = h$ .



**Figura 2.1 - Definições dos parâmetros da serie de Taylor em uma malha unidimensional .**

A série de Taylor converge uniformemente se

$$|\varpi - a| \leq \zeta < R, \quad (2.5)$$

onde  $(R)$  é o raio de convergência sendo definido pela equação de Cauchy-Hadamard (SAEASON,2007) e mostrado na Fig. 2.1

$$R = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow \infty} \sup \left| \frac{f^s(a)}{s!} \right|^{\frac{1}{s}}} . \quad (2.6)$$

Seja  $(f)$  uma função com  $(S)$  derivadas sendo  $s = (i)$  ou  $(1)$ ,  $(ii)$  ou  $(2)$ ,  $(iii)$  ou  $(3)$ ,...,  $S$  em um intervalo que está incluso  $a$  como um ponto interno a este intervalo e  $(S)$  um número finito. O polinômio de Taylor  $p(\varpi)$ , para  $s$  variando de 0 a  $S$ , em  $\varpi = a$ , é definido por

$$p(\varpi) = f(a) + f^{(i)}(a)(\varpi - a) + \frac{f^{(ii)}(a)}{2!}(\varpi - a)^2 + \dots + \frac{f^S(a)}{S!}(\varpi - a)^S. \quad (2.7)$$

O resto do polinômio de Taylor é definido como

$$f(\varpi) = p(\varpi) + \Psi(\varpi). \quad (2.8)$$

Para as equações de Laplace bidimensional e Poisson unidimensional, o polinômio de Taylor é empregado para fornecer às aproximações numéricas necessárias e para avaliar o erro de discretização. O comportamento assintótico é observado na função  $f(\varpi)$ , quando  $s \rightarrow \infty$ . Entretanto, há um erro associado a esta aproximação devido ao truncamento da série de Taylor

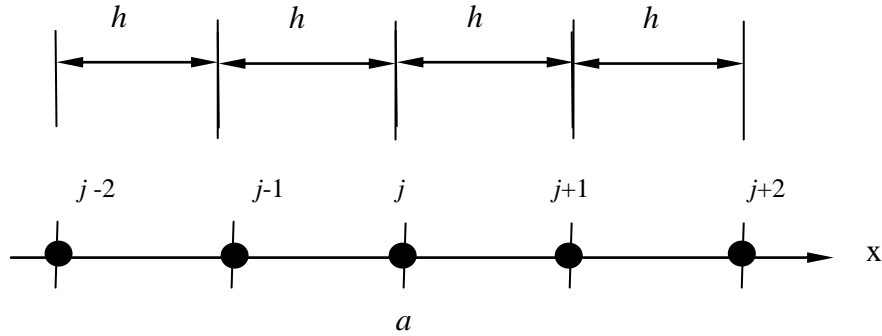
$$|\varepsilon(\varpi)| = |f(\varpi) - p(\varpi)|. \quad (2.9)$$

## 2.2 APROXIMAÇÕES E ORDEM DO ERRO A PRIORI

As aproximações numéricas são empregadas em método numéricos para aproximar as derivadas das equações diferenciais. Podem basear-se em diversas filosofias, como descrito no capítulo 1. Entretanto, nesta tese, as aproximações dos experimentos numéricos contidos nos capítulos 4 e 5 serão feitas em diferenças finitas ou *Finite Difference Method (FDM)*.



A aproximação numérica inicia-se a partir do polinômio de Taylor definida pela Eq. (2.7) onde  $a$  será um nó da malha estudada e representado na Fig. 2.2. São conhecidos os valores de  $f(a)$ . As respectivas derivadas são representadas por  $(f^{(S)})$ , onde  $(S)$  é o índice da derivada. A Eq. (2.7) é válida para uma função contínua em  $(\varpi)$  em um intervalo fechado, onde suas derivadas também devem ser contínuas.



**Figura 2.2 - Malha unidimensional.**

A Fig. 2.2 mostra os nós da malha que será usado para analisar a aproximação numérica de uma derivada de primeira ordem avaliada no ponto  $a$ . Esta aproximação conta com um ponto a montante. Para este tipo de aproximação chama-se *UDS* e será utilizada a série de Taylor desenvolver esta aproximação. Como  $(x - a) = h$  e  $x < a$ , tem-se

$$f(x_{j-1}) = f(a_j) - f^{(i)}(a_j) h + f^{(ii)}(a_j) \frac{h^2}{2} - f^{(iii)}(a_j) \frac{h^3}{6} + f^{(iv)}(a_j) \frac{h^4}{24} - f^{(v)}(a_j) \frac{h^5}{120} + \dots \quad (2.10)$$

Isolando-se a derivada primeira da Eq.(2.10) e dividindo-se por  $(h)$  resulta

$$f^{(i)}(a_j) = \frac{f(a_j) - f(x_{j-1})}{h} + f^{(ii)}(a_j) \frac{h}{2} - f^{(iii)}(a_j) \frac{h^2}{6} + f^{(iv)}(a_j) \frac{h^3}{24} - f^{(v)}(a_j) \frac{h^4}{120} + \dots, \quad (2.11)$$

a partir da derivada de segunda ordem  $f^{(ii)}$ , a Eq. (2.11) será truncado e a série de Taylor será representada por somente um polinômio de Taylor de  $s = i$  e esquematizado na Eq. (2.13).

Para permitir que a Eq. (2.11) possa avaliar o erro da aproximação numérica da derivada aproximada pelo polinômio de Taylor, a mesma é rearranjada em duas partes. Uma parte referente a aproximação e a outra referente ao erro:

$$f^{(s)}(a_j) = (\lambda^s_j) + \varepsilon(\lambda^s_j), \quad (2.12)$$

onde  $(\lambda^s)$  é a aproximação numérica e  $\varepsilon(\lambda^s)$  é o erro de truncamento. Para *UDS*, a Eq. (2.11) é reduzida a

$$(\lambda^i_j)_{UDS} = \frac{f(a_j) - f(x_{j-1})}{h}, \quad (2.13)$$

e o seu erro de truncamento é

$$\varepsilon(\lambda^i_j)_{UDS} = f^{(ii)}(a_j) \frac{h}{2} - f^{(iii)}(a_j) \frac{h^2}{6} + f^{(iv)}(a_j) \frac{h^3}{24} - f^{(v)}(a_j) \frac{h^4}{120} + \dots. \quad (2.14)$$

Portanto, para a aproximação *UDS*, o erro de truncamento, ou a ordem do erro *a priori* é para a derivada primeira é de primeira ordem, pois  $s = 1$ . A generalização da Eq. (2.14) é o erro da aproximação numérica e representada por

$$\varepsilon(\phi) = C_0 h^{p_0} + C_1 h^{p_1} + C_2 h^{p_2} + C_3 h^{p_3} + \dots, \quad (2.15)$$

onde, o conjunto formado por  $(p_0), (p_1), (p_2), (p_3), \dots$  é denominado ordens verdadeiras  $(p_v)$ . Em especial  $(p_0)$  recebe o nome de ordem assintótica, e os coeficientes  $(C_0), (C_1), (C_2), (C_3), \dots$  para *UDS* são representados por  $C_0 = f^{(ii)}(a_j) \frac{h}{2}$ ,  $C_1 = -f^{(iii)}(a_j) \frac{h^2}{6}$ ,  $C_2 = f^{(iv)}(a_j) \frac{h^3}{24}$ ,  $C_3 = -f^{(v)}(a_j) \frac{h^4}{120}$ ,  $\dots$ .

A análise do erro *a priori* serve para comprovar as ordens do erro calculadas *a posteriori*. As análises *a posteriori* serão verificadas nos experimentos numéricos dos capítulos 4 e 5 com base nas análises *a priori* deste capítulo.

### 2.3 ERRO DE DISCRETIZAÇÃO E SUA ESTIMATIVA

A Eq. (2.15) é utilizada para avaliar o erro de truncamento. Entretanto, para os casos estudados nesta tese, pode ser aplicada para o erro de discretização conforme Eq. (1.4). Para

isso, será substituído  $\varepsilon(\phi)$  por  $E(\phi)$  para caracterizar que está sendo avaliado o erro de discretização

$$E_h(\phi) = C_0 h^{p_0} + C_1 h^{p_1} + C_2 h^{p_2} + C_3 h^{p_3} + \dots \quad (1.4)$$

Marchi (2001) demonstra, para os tipos de soluções numéricas, as ordens verdadeira e assintótica do erro de truncamento, como segue na Tab. 2.1.

**Tabela 2.1 – Valores estimados para as ordens verdadeira e assintótica (MARCHI, 2001).**

Derivada de 1ª ordem da variável dependente	<i>UDS</i>	um ponto a montante	1,2,3,...	1
	<i>CDS</i>	diferença central	2,4,6,...	2
	<i>DDS</i>	um ponto a jusante	1,2,3,...	1
	<i>DDS-2</i>	dois pontos a jusante	2,3,4,...	2
Derivada de 2ª ordem da variável dependente	<i>CDS</i>	diferença central	2,4,6,...	2
Média da variável dependente	<i>m</i>	regra do trapézio	2,4,6,...	2

Pode-se observar na Tab. 2.1 que existem ordens assintóticas  $p_0 = 1$  e  $p_0 = 2$  para a mesmo tipo de variável, por exemplo, derivada de 1ª ordem. Esta diferença é devido ao tipo de aproximação numérica. Teoricamente, quanto maior a ordem assintótica, mais acurado é o método e maior é o custo computacional.

## 2.4 CARACTERÍSTICAS DO REFINO DA MALHA

As equações que regem os problemas físicos são representados por funções que expressam as características essenciais dos sistemas físicos em termos de constantes e variáveis que os descrevem (REDDY, 2006). Entretanto, para modelar um problema físico que possui em suas equações várias incógnitas é necessário desenvolver uma quantidade equivalente de equações para possibilitar a sua solução. A resolução do sistema de equações pode ser feita de várias formas, que dependem da complexidade do problema.

Seja a Eq. (2.16) a representação matricial do sistema de equações do modelo matemático que define o problema:

$$[X][\phi] = [Y], \quad (2.16)$$

onde as matrizes  $(X)$ ,  $(\phi)$  e  $(Y)$  representam o sistema original de  $(m)$  equações e  $(n)$  incógnitas (ANTON E RORRES, 2001), sendo  $(X)$  a matriz de coeficientes,  $(\phi)$  a matriz de soluções e  $(Y)$  a matriz dos termos fontes. As soluções numéricas a serem obtidas, com base na Eq. (2.16), em mecânica dos fluidos e transferência de calor, começam quando as leis governantes desses processos estão definidas na forma matemática, em um determinado sistema de coordenadas, geralmente em termos de equações diferenciais (PATANKAR, 1980).

As equações diferenciais, como já descrito, são aproximadas por métodos numéricos que podem ser diferenças finitas, elementos finitos ou volumes finitos, entre outros e discretizadas ao longo de um domínio discreto chamado de malha. Tais equações serão representadas por um sistema de equações lineares aproximadas (DICKSTEIN, 1995) para cada malha  $(h)$ .

$$[X_{g_i}] [\phi_{g_i}] = [Y_{g_i}], \quad (2.17)$$

$(X_{g_i})$  é a transformação linear onde  $g = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$  representa as diferentes tamanhos  $(h)$  de malhas e  $(i)$  são os nós desta malha.

$(\phi_{g_i})$  são o conjunto das soluções numéricas definidas por

$$\phi_{g_i} = \{\phi_{g_0}, \phi_{g_1}, \phi_{g_2}, \phi_{gh_3}, \dots, \phi_{g_\infty}\}, \quad (2.18)$$

e  $(Y_{g_i})$  é a matriz dos termos fontes.

Considerando para um mesmo intervalo unidimensional de  $[0, L]$ , diz-se que quanto maior for o número de nós,  $h \rightarrow 0$  e mais acurada é a solução numérica, ou seja, a solução numérica ( $\phi$ ) tende a solução analítica ( $\Phi$ ).

A consequência do aumento do número de nós, tal que  $h \rightarrow 0$ , é o aumento do número de cálculos executados pelo computador para resolver a Eq. (2.17). Este fato é agravado quando trata-se de sistemas bi e tridimensionais.

Na prática, opta-se por buscar o equilíbrio entre o tamanho de malha ( $h$ ) e o tempo de processamento, a fim de inviabilizar o custo computacional da simulação numérica.

Por definição, a razão de refino, para o caso de malhas unidimensional uniformes, é a relação entre a malha mais grossa ( $h_g$ ) e a malha fina ( $h_{g+1}$ ), ou seja,

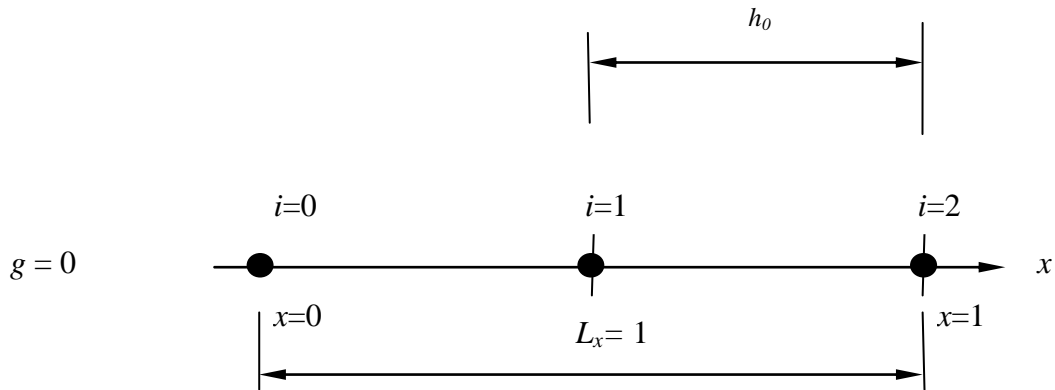
$$r = \frac{h_g}{h_{g+1}} . \quad (2.19)$$

A razão de refino, para o caso de malhas bidimensionais uniformes, é a relação entre o número de elementos da malha grossa ( $N_g$ ) e o número de elementos da malha fina ( $N_{g+1}$ ), ou seja,

$$r = \frac{N_g}{N_{g+1}} . \quad (2.20)$$

O sistema de equações lineares apresentada pela Eq. (2.17) pode ser resolvido de maneira direta ou iterativa. Para sistemas equações com muitas incógnitas, o método direto não é recomendado devendo ser utilizados métodos iterativos. Porém, estes métodos contêm erros numéricos que são reduzidos com a diminuição do tamanho ( $h$ ) dos elementos da malha.

Nas Figs. 2.3 a 2.5 são representados o domínio unidimensional  $L_x = 1$  com diferentes tamanhos de malhas ( $h$ ) definidas por ( $h_0$ ), ( $h_1$ ) e ( $h_2$ ) devido possuírem diferentes tamanhos.



**Figura 2.3 - Malha unidimensional com 3 nós e comprimento  $L_x = 1$ .**

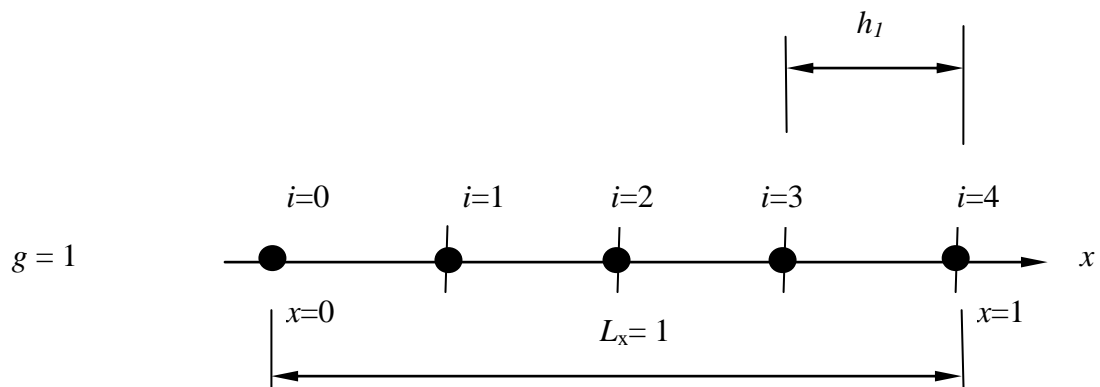
Para a Fig. 2.3, o tamanho do domínio ( $L_x$ ) possui uma malha com três nós e o tamanho ( $h_0$ ) da malha igual a  $(\frac{L_x}{2})$  ou  $\frac{1}{2}$ .

A representação  $g = 0$  indica o índice que define a malha de estudo.  $(\phi_{h_0})$  é o conjunto formado pelas soluções numéricas em cada nó:

$$\phi_o = \{ \phi_{0_0}, \phi_{0_1}, \phi_{0_2} \}, \quad (2.21)$$

onde  $(\phi_{g_i})$  são as soluções numéricas em cada nó ( $i$ ) com  $i = 0, 1$  e  $2$ .

Para a Fig. 2.4, o tamanho do domínio ( $L_x$ ) possui uma malha de cinco nós e o tamanho ( $h_1$ ) da malha igual a  $(\frac{L_x}{4})$  ou  $\frac{1}{4}$ :



**Figura 2.4 - Malha unidimensional com 5 nós e comprimento  $L_x = 1$ .**

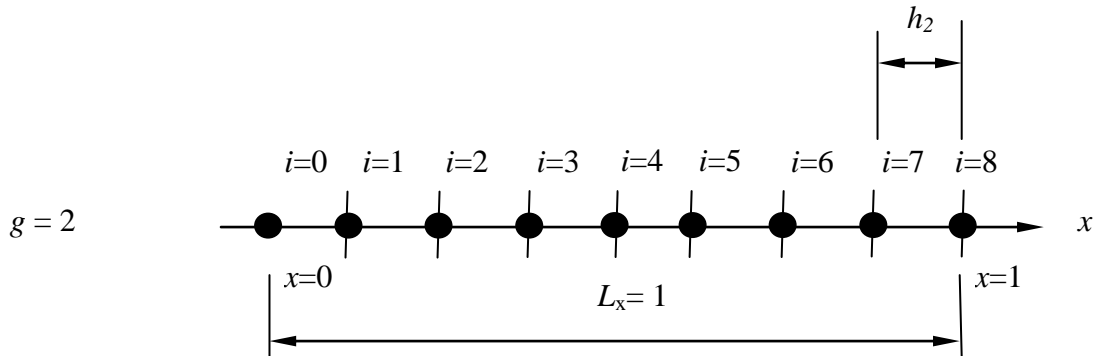
A Fig. 2.4 representa a segunda malha de estudo em  $g = 1$ . O conjunto formado pelas soluções numéricas em cada nó é dado por

$$\phi_1 = \{ \phi_{1_0}, \phi_{1_1}, \phi_{1_2}, \phi_{1_3}, \phi_{1_4} \}, \quad (2.22)$$

onde  $(\phi_{1_i})$  são as soluções numéricas em cada nó  $(i)$  com  $i = 0, 1, 2, 3$  e  $4$ . A razão de refino para os exemplos das Fig. 2.3 e 2.4 é calculada a partir da Eq. (2. 19) resultando em

$$r = \frac{h_0}{h_1} = 2. \quad (2.23)$$

Para a Fig. 2.5, o tamanho do domínio ( $L_x$ ) possui nove nós com tamanho ( $h_2$ ) da malha igual a  $(\frac{L_x}{8})$  ou  $\frac{1}{8}$ :



**Figura 2.5 - Malha unidimensional com 9 nós e comprimento  $L_x = 1$ .**

A Fig. 2.5 representa a terceira malha de estudo em  $g = 2$  formado pelo conjunto de soluções numéricas em cada nó definido por

$$\phi_2 = \{ \phi_{2_0}, \phi_{2_1}, \phi_{2_2}, \phi_{2_3}, \phi_{2_4}, \phi_{2_5}, \phi_{2_6}, \phi_{2_7}, \phi_{2_8} \}, \quad (2.24)$$

onde  $(\phi_{g_i})$  são as soluções numéricas em cada nó  $(i)$  com  $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$  e  $8$ . A razão de refino para os exemplos das Fig. 2.4 e 2.5 é calculada por

$$r = \frac{h_1}{h_2} = 2. \quad (2.25)$$

As Eqs. (2.22) a (2.25) podem ser representadas, de forma geral, para o caso unidimensional

$$\phi_g = \{ \phi_{g_i} \} \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, N \quad (2.26)$$

(i) independe de  $g = 0, 1, 2, \dots, G$ .

A expansão da Eq. (2.26) para o sistema bidimensional resulta

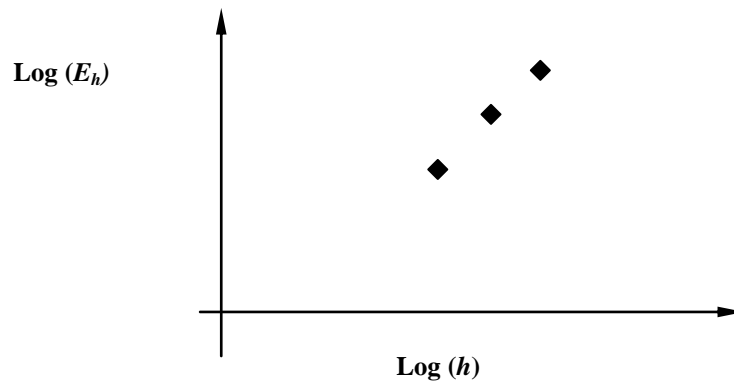
$$\phi_g = \{ \phi_{g_{i,j}} \} \quad (2.27)$$

$(\phi_{g_{i,j}})$  representa todas as soluções numéricas das variáveis de interesse do problema em função de uma determinada malha.

As Eq. (2.26) e Eq. (2.27) representam as soluções numéricas em toda a malha. Para uma sequência de soluções representado nas Figs 2.3 a 2.5 e mostrado na Fig. 2.6, espera-se que com este procedimento o erro de discretização nas soluções numéricas sejam reduzidos a medida que o tamanho ( $h$ ) da malha diminua. Entretanto, para situações em que as variáveis estudadas sejam dependentes da posição ou do tipo máximo e/ou mínimo são listadas as considerações a respeito da razões de refino:

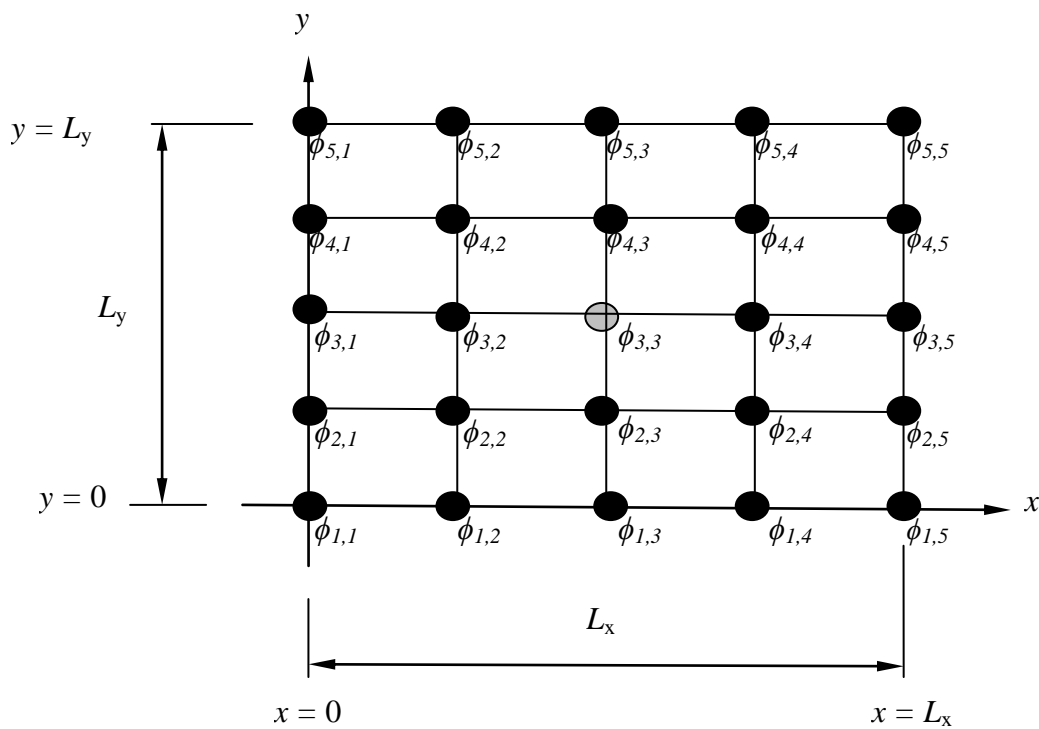
- Para as variáveis que são dependentes do sistema coordenado – a razão de refino deve ser compatível com os diferentes tamanhos ( $h$ ) de malha e haver na posição de análise desejada, para cada malha, um nó que carregue a informação da variável de interesse.
- Para as variáveis que são do tipo máximo e/ou mínimo – para variáveis de interesse do tipo máximo e/ou mínimo deve-se buscar o ponto nodal com valor máximo e/ou mínimo nos diferentes tamanhos ( $h$ ) de malha. Com este procedimento o efeito qualitativo da Fig. 2.6 será mantido, ou seja, com a redução do tamanho ( $h$ ) de malha haverá redução do erro de discretização. O efeito quantitativo está detalhado no item 3.4.





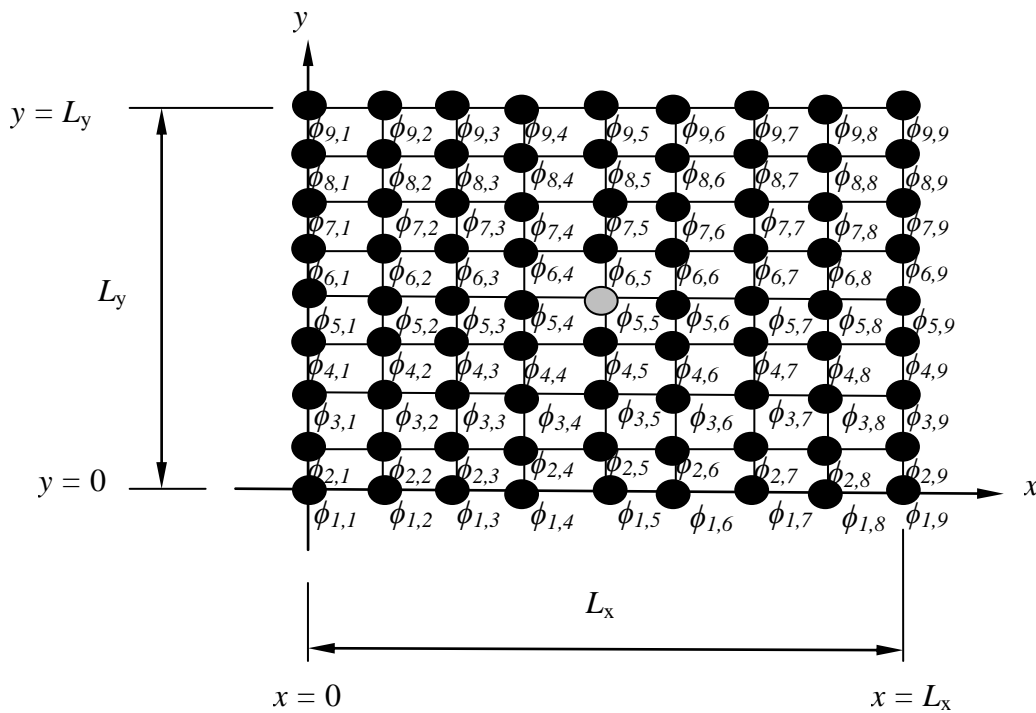
**Figura 2.6 - Efeito qualitativo da redução do tamanho da malha  $h$  em função do módulo do erro para uma determinada variável no domínio de cálculo.**

Para a dependência da variável de interesse com o sistema coordenado, considera-se um sistema bidimensional com malha 5x5, sobre o tamanho do domínio ( $L_x \times L_y$ ) (o domínio é único) mostrado na Fig. 2.7, cujo ponto de interesse é o centro do domínio, isto é, a avaliação da solução numérica em  $\phi_{3,3} = \left(\frac{L_x}{2}; \frac{L_y}{2}\right)$ :



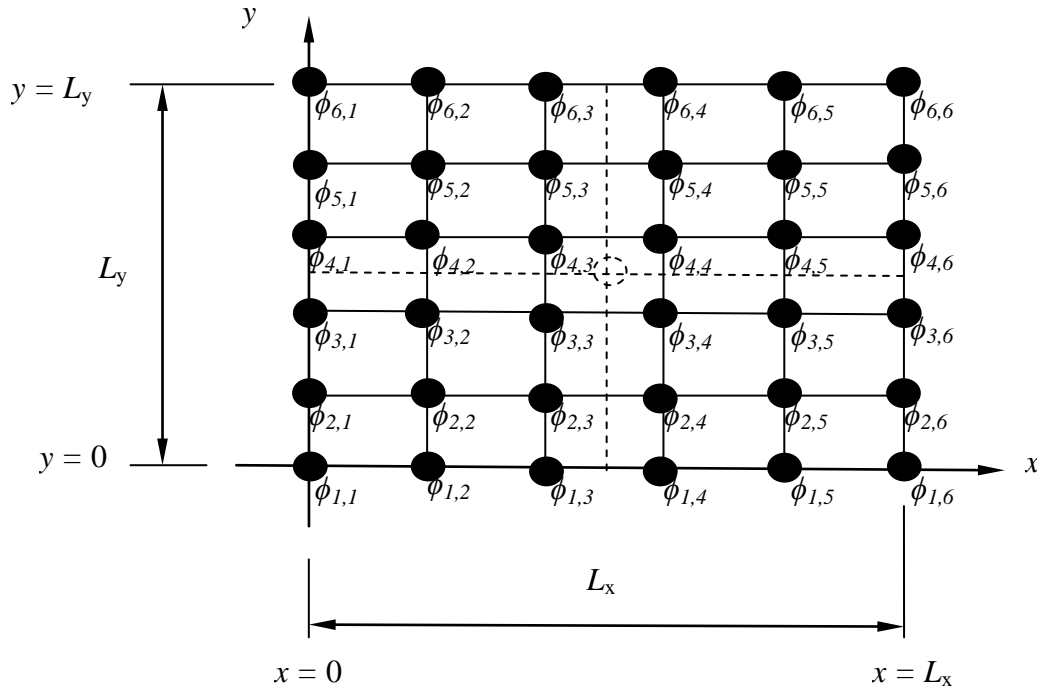
**Figura 2.7 – Malha bidimensional com 25 nós.**

A razão de refino deve ser compatível com o ponto de interesse. Para o exemplo que compreende as Figs 2.7 até 2.9, a escolha da razão errada acarretará na falta de um nó central para avaliação da informação. As malhas  $5 \times 5 = 25$  (nós) e  $9 \times 9 = 81$  (nós) representadas nas Figs. 2.7 e 2.8 são compatíveis entre si, pois nos duas figuras existem nós em  $(\phi_{3,3})$  e  $(\phi_{5,5})$  que carregam as informações da posição espacial em  $(\frac{L_x}{2}, \frac{L_y}{2})$ . Observa-se que para as malhas  $5 \times 5$ ,  $9 \times 9$ ,  $17 \times 17$ ,  $33 \times 33$ , ..., haverá sempre um nó central em  $(\frac{L_x}{2}, \frac{L_y}{2})$ .



**Figura 2.8 - Malha bidimensional com 81 nós.**

No entanto, a apresentação feita na Fig. 2.9, mostra uma malha  $6 \times 6 = 36$  (nós) que não é compatível com as malhas  $5 \times 5$  e  $9 \times 9$ , representadas nas Figs. 2.7 e 2.8 para um nó central na posição espacial  $(\frac{L_x}{2}, \frac{L_y}{2})$ . Nestes casos, a taxa de refino não é compatível com o ponto de interesse localizado em  $(\frac{L_x}{2}, \frac{L_y}{2})$  e não haverá solução numérica no centro do domínio devido à inexistência de um nó central.



**Figura 2.9 - Malha bidimensional com 36 nós.**

Como faz parte do interesse desta tese obter as soluções numéricas em uma posição do domínio de cálculo, define-se como sendo  $(\phi_g)$  a solução numérica da variável de interesse em uma determinada posição ou campo, sendo  $g$  o índice de malha da solução numérica definida em  $g = 0, 1, 2, 3, 4, \dots, G$ , os índices  $(i)$  e  $(j)$  são omitidos da Eq. (2.28) em virtude de  $(\phi)$  já carregar todas as informações necessárias para situá-la completamente no problema estudado e será representa somente por

$$\phi_g = \{ \phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_G \} \quad g = 0, 1, 2, 3, \dots, G \quad (2.28)$$

onde  $(G)$  é a malha mais fina que se quer alcançar.

## 2.5 TAXA DE CONVERGÊNCIA

Em métodos numéricos, a taxa de convergência  $(\Theta)$  é o ângulo formado pela sequência  $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_G$  e pelo tamanho da manha  $(h)$ , definida por

$$\Theta = \arctg \frac{\phi_G - \phi_{G-1}}{h_G - h_{G-1}}. \quad (2.29)$$

A taxa de convergência é constante quando  $\Theta_G = \Theta_{G-1} = \Theta_{G-3} = \dots = \Theta_0$ . Os métodos numéricos, normalmente, apresentam sua própria taxa de convergência. Entretanto, a extrapolação de Richardson pode acelerar a convergência melhorando os resultados e fazendo com que as variáveis de interesses ( $\phi_g$ ) sejam obtidas em menor tempo e com maior acurácia.

## 2.6 EXTRAPOLAÇÃO DE RICHARDSON

A extrapolação é um processo matemático que utiliza uma função de transferência onde os resultados conhecidos como  $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_G$  obtidos em diversas malhas ( $G$ ) com  $h_0 > h_1 > h_2 > h_3 > \dots > h_G$  são usados para estimar outros valores, mais acurados e dentro do intervalo conhecido. São listadas a seguir as vantagens do método de extrapolação, que são:

- Baixa complexidade na implementação computacional, se comparado com outros métodos. É um pós-processamento e a programação da função de extrapolação é simples.
- Sendo um pós-processamento, não interfere na programação original.
- Os requisitos computacionais são baixos.

As desvantagens do método são:

- Utiliza apenas os resultados existentes nas diversas malhas  $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_G$ . Caso os resultados existentes estejam errados, a extrapolação será inútil.
- Assume que as tendências dos resultados existentes nas diversas malhas  $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_G$  serão suficientes para prever os dados futuros obtidos pela extrapolação.
- Deve possuir um número adequado de malhas ( $G$ ) que permita a análise da convergência da extrapolação. As malhas iniciais  $\phi_0, \phi_1, \phi_2$  podem conter outros tipos de erros e distorcer os resultados.

Matematicamente a extrapolação é definida por uma função de transferência ( $T$ ), dado pela seguinte

$$T: \phi_g \rightarrow \phi_{g,m} \quad , \quad (2.30)$$

onde:

$$g = 0, 1, 2, 3, \dots, G$$

$$m = 1$$

$(\phi_g)$  é a solução numérica sem extrapolação e  $(\phi_{g,m})$  é a solução numérica extrapolada. A sequência  $(\phi_g)$  converge mais lentamente para o limite (SIDI, 2003). A nova sequência formada por  $(\phi_{g,m})$  obtida por extrapolação, com base em  $(\phi_g)$ , converge mais rapidamente para  $(\Phi)$  (se houver) quando  $g \rightarrow \infty$ .

Nesta tese, o acelerador de convergência aplicado é a extrapolação de Richardson. A extrapolação de Richardson (ER) Richardson (1910), Richardson e Gaunt (1927) é considerado um pós-processamento e pode ser aplicada *a posteriori* das soluções obtidas por *FDM*, *FEM*, *FVM* e outros devido converter  $(\phi_g)$  em  $(\phi_{g,m})$  como definido na Eq. (2.30). Esta função de transferência de baixa complexidade é utilizada para gerar resultados com alta acurácia com equações de baixa ordem (BURDEN e FAIRES, 2003).

A Eq. (3.31) é a solução exata  $(\Phi)$  e é composta pela soma de duas partes: (1) a solução numérica  $\phi$  que pode ser obtida por qualquer aproximação com, por exemplo, *UDS*, *DDS*, *CDS* e outros e (2) o erro de truncamento das referidas aproximações considerando que as outras fontes de erros são desprezíveis ou inexistentes, definida por

$$\Phi = \phi_{UDS, DDS, CDS, \dots} + E(\phi)_{UDS, DDS, CDS, \dots} \quad (2.31)$$

O erro de truncamento é dependente da ordem da aproximação

$$E(\phi)_{UDS, DDS, CDS, \dots} = O(h^{p_0}). \quad (2.32)$$

A extrapolação de Richardson é uma ferramenta matemática que por meio de uma função possibilita obter uma solução mais próxima da solução exata

$$T: \{\phi_g\} \rightarrow \{\phi_\infty - O_{g,m}(h^{p_0})\} , \quad (2.33)$$

onde  $(\phi_\infty)$  é a extrapolação de Richardson. Fazendo com que  $m = G$  e  $g = G$ , sendo  $(G)$  um número inteiro positivo que representa o maior número de malhas possível, tem-se  $O_{g,m}(h^{p_0}) \rightarrow 0$ , a solução analítica  $(\Phi)$  é aproximadamente igual a  $(\phi_\infty)$

$$\Phi \cong \phi_\infty. \quad (2.34)$$

A equação de Richardson (1927) na forma original é representada por

$$\phi_\infty = \frac{h_g^2 \phi_{g+1} - h_{g+1}^2 \phi_g}{h_g^2 - h_{g+1}^2} + E(\phi_\infty), \quad (2.35)$$

onde  $(\phi_{g+1})$  e  $(\phi_g)$  significam as soluções numéricas nas malhas fina e grossa. Sabendo-se que  $r = \frac{h_g}{h_{g+1}}$  e fazendo o termo  $E(\phi_\infty) = 0$  conforme Roache (1994), tem-se a aproximação:

$$\phi_\infty = \phi_{g+1} + \frac{\phi_{g+1} - \phi_g}{r^2 - 1}. \quad (2.36)$$

Roache (1994) generaliza a extrapolação de Richardson para qualquer aproximação numérica substituindo o expoente da razão de refino por  $(p_0)$  resultando **a equação generalizada de Richardson (RE)** definida por

$$\phi_\infty = \phi_{g+1} + \frac{\phi_{g+1} - \phi_g}{(r^{p_0} - 1)}, \quad (2.37)$$

Para a extrapolação de Richardson ser efetiva é necessário que as soluções numéricas  $(\phi_g)$  sem extrapolação possuam somente erro de discretização.

A Eq. (1.1) pode ser calculadas quando se conhece a solução analítica do modelo matemático. Quando a solução analítica é desconhecida, estima-se o seu valor. A estimativa é chamada de incerteza da solução numérica e é assim definida (MARCHI e SILVA, 2005):

$$U(\phi) = \phi_\infty - \phi_g. \quad (2.38)$$

Rearranjando a Eq. (2.37) com a Eq. (2.38), tem-se

$$U_{RI} = \frac{\phi_{\infty} - \phi_g}{(r^{p_0} - 1)}, \quad (2.39)$$

definido como o **estimador de erro de Richardson**.

### 3 METODOLOGIA PARA APLICAÇÃO DE MÚLTIPLAS EXTRAPOLAÇÕES DE RICHARDSON - MER

Este capítulo, desenvolve o conceito das múltiplas extrapolações de Richardson para as aplicações nas equações de Laplace bidimensional e Poisson unidimensional, tratados nos capítulos 4 e 5. Serão generalizadas para múltiplas extrapolações as Eq. (2.37) – equação generalizada de Richardson, e Eq. (2.39) – estimador de erro de Richardson.

As múltiplas extrapolações de Richardson é a aplicação sucessiva das extrapolação de Richardson. É o processo de extrapolar as soluções numéricas já extrapoladas.

Entretanto, Shyy *et al.*(2010) e Marchi *et al.* (2009) aplicaram a extrapolação de Richardson Eq. (2.37) e o método demonstrou ser ineficaz. Entretanto, a bibliografia especializada não define a causa para esta ineficiência do método.

Nos problemas estudado por Shyy *et al.*(2010) e Marchi *et al.* (2009) as variáveis de interesse que apresentam ineficiência são aquelas que estão relacionados com valores máximos e/ou mínimos.

Para resolver este problema, foi desenvolvido uma metodologia para corrigir a ineficiência da extrapolação de Richardson. Ao isolar a ineficiência do método de Richardson para estudá-lo, percebeu-se, por meio dos experimentos numéricos, um novo tipo de erro que ainda não estava listado na literatura especializada. Para este novo erro definiu-se como erro de posição.

Este erro está associado a variáveis que buscam na malha valores máximo e/ou mínimo. Para cada conjunto discreto de soluções numéricas ( $\phi_G$ ), o nó que carrega as informações do valores da variável do tipo máximo e/ou mínimo muda. Parte-se da premissa que a medida que o tamanho ( $h$ ) da malha diminui, aumenta o números de nós e, com isto, haverá um único nó da malha cada vez mais tendendo ao valor real da variável desejada. Esta premissa, basea-se na tendência mostrada na Fig. 2.6 e já consagrada nas simulações numéricas.

O erro de posição é definido como diferença entre o valor da solução analítica ( $\Phi$ ) da variável de máximo e/ou mínimo e a solução numérica ( $\phi_G$ ). Este erro é dependente da malha ( $G$ ) e diminui a medida que o tamanho ( $h$ ) da malha é reduzido.

O Cap. 3 introduzirá as equações de MER e descreverá a metodologia capaz de tornar a extrapolação de Richardson eficiente para as variáveis do tipo máximo e/ou mínimo.



### 3.1 METODOLOGIA PARA MÚLTIPLAS EXTRAPOLAÇÕES DE RICHARDSON

No Cap. 2 foram definidos as soluções numéricas em diversas malhas sem extrapolação para a aplicação da extrapolação de Richardson. As soluções  $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_G$  são definidas como as soluções numéricas sem extrapolação, e sua obtenção é feita diretamente por meio dos resultados das simulações com diferentes malhas ( $h$ ). Um segundo índice ( $m$ ) é incorporado nas soluções numéricas ( $\phi_{g,m}$ ) para identificar o nível de extrapolação. Na Tab. 3.1 é feita a representação esquemática dessas soluções, onde ( $g$ ) é o conjunto das malhas representado em um intervalo discreto de passo 1, definido por  $[0, G]$ . Essa sequência é crescente e está representada pelo índice 1 para a malha mais grossa e ( $G$ ) para a malha mais fina e o índice  $m=0$  significa que não houve extrapolação.

**Tabela 3.1 – Índices das soluções numéricas sem extrapolação.**

	<i>Malhas</i>	<i>Solução Numérica sem Qualquer Extrapolação</i>
<i>Malha mais grossa</i>	$g=0$	$\phi_0 = \phi_{0,0}$
	$g=1$	$\phi_1 = \phi_{1,0}$
	$g=2$	$\phi_2 = \phi_{2,0}$
	$g=3$	$\phi_3 = \phi_{3,0}$
	$g=\dots$	$\phi_{\dots}$
<i>Malha mais fina</i>	$g=G$	$\phi_G = \phi_{G,0}$

A Eq. (3.1) representa a equação para a extrapolação repetida de Richardson, onde ( $\phi_{g,m}$ ) é a solução numérica em uma determinada malha ( $g$ ) com ( $m$ ) extrapolações:

$$\phi_{g,m} = \phi_{g, m-1} + \frac{\phi_{g, m-1} - \phi_{g-1, m-1}}{r^{p_{m-1}} - 1} . \quad (3.1)$$

A Eq. (3.1) é válida para  $g=[1, G]$  e  $m=[1, g-1]$ . O diagrama da Tab. 3.2 exemplifica os índices da Eq. (3.1) e indica seus limites de operação. As setas na Tab. 3.2 representam os resultados das extrapolações; por exemplo, o cálculo extrapolado de ( $\phi_{1,1}$ ) é obtido a partir das soluções ( $\phi_{0,0}$ ) e ( $\phi_{1,0}$ ); o cálculo extrapolado de ( $\phi_{2,2}$ ) é obtido a partir das soluções

$(\phi_{1,1})$  e  $(\phi_{2,1})$ ; e assim o método se repete. As extrapolações são possíveis até  $(m)$  extrapolações que estão relacionadas com o número de soluções numéricas  $g = G$ . Com MER, a correção do resultado é diagonal com  $\phi_{0,0}$ ,  $\phi_{1,1}$ ,  $\phi_{2,2}$ ,  $\phi_{3,3}$ , ... até  $\phi_{G,G}$ .

A representação  $m=0$  indica a representação de solução numérica sem qualquer extrapolação. As ordens verdadeiras representadas por  $(p_m)$  constituem-se de uma progressão aritmética e depende de  $(p_0)$  que pode ser representada por

$$p_m = p_0 + m (p_1 - p_0) \quad (3.2)$$

sendo a Eq. (3.2) é válida  $g=[1, G]$  e  $m=[0, g-1]$

**Tabela 3.2 – Índices das Múltiplas Extrapolações de Richardson.**

<i>Malhas</i>	<i>m=0</i> <i>Solução numérica</i> <i>sem qualquer</i> <i>extrapolação</i>	<i>m=1</i> <i>Primeira</i> <i>extrapolação</i>	<i>m=2</i> <i>Segunda</i> <i>extrapolação</i>	<i>m= ...</i>	<i>m=G</i>
$g=0$	$\phi_{(g=0,m=0)}$				
$g=1$	$\phi_{(g=1,m=0)}$	$\phi_{(g=1,m=1)}$			
$g=2$	$\phi_{(g=2,m=0)}$	$\phi_{(g=2,m=1)}$	$\phi_{(g=2,m=2)}$		
$g=...$	...	...	...	...	
$g=G$	$\phi_{(g=G,m=0)}$	$\phi_{(g=G,m=1)}$	$\phi_{(g=G,m=2)}$		$\phi_{(g=G,m=G)}$
$p_m$	$p_0$	$p_1$	$p_2$		$p_G$

Na Tab. 3.2 foi mostrado dois mecanismos para melhorar a acurácia dos resultado, o primeiro é a redução do tamanho da malha ( $h$ ), do que resulta um maior número de malhas ( $g$ ) e o outro, é extrapolação em  $(m)$  vezes. Entretanto, o mecanismo da extrapolação é dependente do número de soluções numéricas.

### 3.1.1 Ordem efetiva

A ordem efetiva ( $p_E$ ) é definida como a inclinação local da curva do erro de discretização ( $E$ ) da solução numérica ( $\phi$ ) versus o tamanho ( $h$ ) dos elementos de malha num gráfico bilogarítmico (MARCHI, 2001).

Segundo Marchi (2001), a incerteza calculada a partir da Eq. (2.39) somente fornece o valor correto do erro de discretização se

$$C_E h_g^{p_E} = E(\phi_g), \quad (3.3)$$

onde  $(p_E)$  é a ordem efetiva,  $(C_E)$  é um coeficiente dependente de  $(h)$  e definido por Marchi (2001)

$$C_E = C_0 + C_1 h^{p_1 - p_0} + C_2 h^{p_2 - p_0} + C_3 h^{p_3 - p_0} + \dots \quad (3.4)$$

Entretanto, o coeficiente  $(C_E)$  é constante e independente de  $(h)$  se o tamanho da malha  $(h)$  é muito pequeno, isto é, quando  $h \rightarrow 0$ . Assim sendo, o valor do erro tende ao valor do primeiro termo da Eq. (3.4), isto é,  $C_1 h^{p_1 - p_0} \cong C_2 h^{p_2 - p_0} \cong C_3 h^{p_3 - p_0} \cong \dots \cong 0$ , e

$$C_E = C_0 \quad \text{se, e somente se,} \quad h \rightarrow 0. \quad (3.5)$$

Agora, sendo o coeficiente  $(C_E)$  constante, pode-se calcular  $(p_E)$  aplicando-se a Eq. (3.3) em duas malhas  $(\phi_g)$  e  $(\phi_{g+1})$  definidas por Marchi (2001)

$$C_E h_g^{p_E} = E(\phi_g) \quad (3.6)$$

e

$$C_E h_{g+1}^{p_E} = E(\phi_{g+1}) \quad (3.7)$$

onde o erro de discretização  $E(\phi)$  e o tamanho da malha  $(h)$  são conhecidos nas duas malhas. As incógnitas são o coeficiente  $(C_E)$  e a ordem efetiva  $(p_E)$ . Resolvendo o sistema de equações formado pelas Eqs. (3.6) e (3.7), obtém-se somente para  $(p_E)$

$$(p_E)_g = \frac{\log \left[ \frac{E(\phi_{g-1})}{E(\phi_g)} \right]}{\log(r)} ; \quad (3.8)$$

a Eq. (3.8) é válida para  $g = [1, G]$  e  $(r)$  a razão de refino. Esse cálculo *a posteriori* das soluções numéricas permite confirmar a ordem assintótica do erro de discretização. À medida que  $(h)$  é reduzido, espera-se que os valores representados em gráfico bilogarítmico tendem à ordem assintótica do erro de truncamento.

A Eq. (3.8) generalizada para MER resulta em

$$(p_E)_{g,m} = \frac{\log \left[ \frac{E(\phi_{g-1,m})}{E(\phi_{g,m})} \right]}{\log(r)} ; \quad (3.9)$$

a Eq. (3.9) é válida para  $g = [1, G]$  e  $m = [0, g-2]$ . De acordo com as Eqs. (3.8) e (3.9), é necessário conhecer a solução analítica exata da variável para que seja possível o seu cálculo. Nos casos em que não há esta opção utiliza-se o conceito de ordem aparente.

### 3.1.2 Ordem aparente

A ordem aparente  $(p_u)$  é definida com a inclinação da curva de incerteza  $(U)$  da solução numérica  $(\phi)$  *versus* o tamanho da malha  $(h)$  dos elementos da malha em um gráfico bilogarítmico (MARCHI, 2001). O cálculo de  $(p_u)_g$  *a posteriori* permite confirmar a ordem assintótica do erro de discretização. À medida que o tamanho  $(h)$  da malha é reduzido, os valores representados em um gráfico bilogarítmico tendem à ordem assintótica do erro de truncamento.

$$K_u h_g^{p_u} = U(\phi_g), \quad (3.10)$$

onde  $(K_u)$  é um coeficiente constante e independente do tamanho  $(h)$  da malha quando  $h \rightarrow 0$ . A análise deste coeficiente  $(K_u)$  é equivalente ao já discutido com o coeficiente  $(C_E)$ .

Sendo o coeficiente  $(K_u)$  constante, pode-se calcular  $(p_u)$  aplicando a Eq. (3.10) e substituindo  $U(\phi_g)$  pela Eq. (2.38) resultando em

$$K_u h^{p_u} = \phi_\infty - \phi_g. \quad (3.11)$$

Aplicando a Eq. (3.11) em três malhas  $(\phi_g)$ ,  $(\phi_{g-1})$  e  $(\phi_{g-2})$ ,

$$K_u h_g^{p_u} = \phi_\infty - \phi_g, \quad (3.12)$$

$$K_u h_{g-1}^{p_u} = \phi_\infty - \phi_{g-1}, \quad (3.13)$$

$$K_u h_{g-2}^{p_u} = \phi_\infty - \phi_{g-2}, \quad (3.14)$$

observa-se as três incógnitas que são:  $(K_u)$ ,  $(p_u)$  e  $(\phi_\infty)$ . Resolvendo o sistema de equações formado pelas Eqs. (3.12), (3.13) e (3.14), obtém-se para  $(p_u)$

$$(p_u)_g = \frac{\log \left[ \frac{\phi_{g-1} - \phi_{g-2}}{\phi_g - \phi_{g-1}} \right]}{\log(r)}. \quad (3.15)$$

A Eq. (3.15) é válida para  $g = [3, G]$ .

A Eq. (3.15) generalizada para MER resulta em

$$(p_u)_{g,m} = \frac{\log \left[ \frac{\theta_{g-1,m} - \theta_{g-2,m}}{\theta_{g,m} - \theta_{g-1,m}} \right]}{\log(r)}, \quad (3.16)$$

sendo a Eq. (3.16) válida para  $g = [2, G]$ ,  $m = [1, g-2]$  e a razão de refino constante. A substituição de  $\phi$  por  $\theta$  da Eq.(3.15) para a Eq. (3.16) é devido a utilização das soluções numéricas obtidas pela Eq. (3.18) e não por meio da Eq. (3.1).

Para a Eq. (3.16), à medida que  $g \rightarrow G$ ,  $h$  deve tender a 0 e os valores de  $(p_u)_{g,m}$  devem tender à ordem verdadeira  $p_m$  do respectivo nível de extrapolação ( $m$ ) independente de qualquer análise *a priori*. As ordens práticas do erro de discretização, em níveis distintos de extrapolação, são obtidas por meio da aplicação das múltiplas extrapolações de Richardson. O cálculo de  $(p_u)_{g,m}$  *a posteriori* permite, portanto, para cada nível de extrapolação, confirmar as ordem verdadeiras do erro de discretização.

Para discutir a Eq. (3.18), parte-se do princípio que sejam conhecidos os valores das ordens verdadeiras do erro de discretização ( $p_m$ ) da Eq. (3.1). Estas ordens foram estimadas *a priori* e levam em consideração o tipo de aproximação e as suas devidas degenerações de ordens, se houveram. Os resultados obtidos para estas ordens não são exatos e devem ser confirmados *a posteriori*. Para tanto, utiliza-se a Eq. (3.18) que aplica o conceito da ordem aparente definida pelas Eqs. (3.15) e (3.16). A substituição da variável  $\phi$  por  $\theta$  é devido a mudança do termo  $(r^{p_{m-1}})$  por  $(r^{(p_u)_{g,m-1}})$ . Portanto, a Eq. (3.18) resulta em

$$\theta_{g,m} = \theta_{g,m-1} + \frac{\theta_{g,m-1} - \theta_{g-1,m-1}}{r^{(p_u)_{g,m-1}} - 1}. \quad (3.17)$$

A Eq. (3.18) é válida para  $g = [2, G]$ ,  $m = [1, g-2]$ . Para  $m = 0$  a Eq. (3.18) não se aplica. Para estimar adequadamente ( $p_m$ ) é necessário conhecer pelo menos as três primeiras ordens verdadeiras:  $p_0$ ,  $p_1$  e  $p_2$ . Caso isto não seja possível, pode-se estimar as outras ordens a partir de  $p_0$  e  $p_1$  devido ao fato que os valores de ( $p_m$ ) formam uma progressão aritmética.

Marchi *et al.* (2008) cita que quando os valores de ( $p_m$ ) são determinados arbitrariamente, o impacto desta escolha pode afetar negativamente o resultado esperado.

Nesta tese, os valores de ( $p_m$ ) são obtidos *a posteriori* de  $(p_u)_{g,m}$ , para comprovar os valores de ( $p_m$ ) são obtidos *a priori*.  $(p_u)_{g,m}$  quando  $h \rightarrow 0$  devem ser números inteiros e positivos que são extraídos para cada nível de extrapolação ( $m$ ). Quando  $h \rightarrow 0$  a tendência vale:  $(p_u)_{g,m} \rightarrow (p_m)$ .

### 3.1.3 Estimador de erro de Richardson

A estimativa do erro de discretização da solução numérica ( $U_{RI}$ ) da Eq. (2.39) pode ser empregada para qualquer variável de interesse. Para ( $g$ ) malhas e ( $m$ ) extrapolações de Richardson o estimador de Richardson é dado por

$$U(\phi_{g,m}) = \frac{\phi_{g,m} - \phi_{g-1,m}}{r^{p_m} - 1}, \quad (3.18)$$

sendo que a equação é válida para  $g=[1, G]$  e  $m=[0, g-2]$ .

### 3.2 METODOLOGIA PARA CORREÇÃO DAS SOLUÇÕES NUMERICAS SEM EXTRAPOLAÇÃO

Nesta parte do presente capítulo concentra-se na fundamentação teórica e apresenta a metodologia utilizada na correção das soluções numéricas sem extrapolação definidas por  $(\phi_{g,0})$ . Esta correção nas soluções numéricas  $(\phi_{g,0})$  em  $m=0$  e  $g = 0, 1, 2, \dots, G$  é aplicada quando se quer usar o pós processamento das MER em problemas do tipo máximo e/ou mínimo na qual não se conhece o ponto de máximo e/ou mínimo da função discreta.

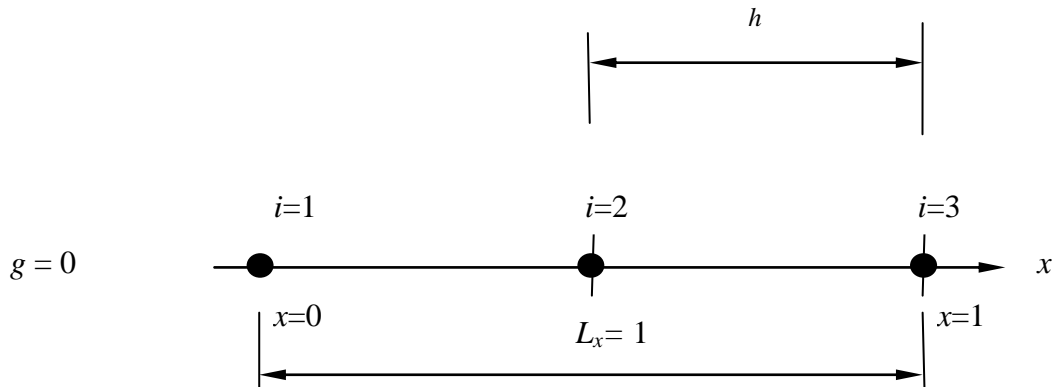
No capítulo anterior, na Fig. 2.6 foi mostrado o efeito qualitativo da redução do tamanho ( $h$ ) da malha em função do módulo do erro de discretização. O procedimento comumente utilizado em *CHT* e *CFD* para localizar o máximo e/ou mínimo da variável de interesse ( $\phi$ ) é a escolha do maior e/ou menor valor entre todas as soluções numéricas  $(\phi_{g_i})$  para cada tamanho ( $h$ ) de malha, sendo ( $i$ ) todos os nós da malha e ( $g$ ) o refino da malha.

Este procedimento, atende qualitativamente o propósito da redução do erro discretização da variável de interesse quando  $h$  é reduzido. Entretanto, quantitativamente não. Na Fig. 3.1 está representados o domínio unidimensional  $L_x = 1$  com 3 nós ( $i=1, 2, 3$ ) malhas e  $h=1/2$ . Suponha que exista um máximo para a variável de interesse ( $\phi$ ) entre os nós  $i=2$  e  $i=3$ .

Pelo procedimento comumente utilizado, deve optar pela escolha do maior valor entre  $(\phi_{0_2})$  e  $(\phi_{0_3})$  que estão posicionados nos nós  $i=2$  e  $i=3$ . A escolha por uma das duas soluções numéricas  $(\phi_{0_2})$  e  $(\phi_{0_3})$  atende qualitativamente o problema devido em *CHT* e *CFD* as soluções serem aproximadas.

No entanto, quantitativamente está errado, pois o ponto de máximo não está localizado nem em  $i=2$  e ou  $i=3$ . Este erro não pode ser caracterizado como erro de discretização devido serem estes avaliados seus pontos previsto em  $i=2$  e ou  $i=3$ . Não há outros nós nesta malha que possam carregar os valores das solução numérica  $(\phi_{0_i})$  onde (?) significa a inexistência de um nó ( $i$ ) adequado para avaliar a solução numérica. Tecnicamente, não há como prever este ponto (?), pois é a incógnita do problema.

Esta situação pode se chamar de um erro operacional, na qual insere nas na sequência de soluções numéricas  $(\phi_g)$  da variável de interesse um erro de posição maior que o erro de discretização.



**Figura 3.1 - Malha unidimensional com 3 nós e comprimento  $L_x = 1$ .**

Para problemas onde se conhece a localização ( $x$ ), por exemplo, pode-se planejar uma sequência de refino que faça existir sempre um nó ( $i$ ) neste local e reduzir o erro descrito no parágrafo anterior. Entretanto, é incomum ter esta informação *a priori*.

A efetividade da múltipla extrapolação de Richardson está associada diretamente à existência de somente erros de discretização nas soluções numéricas sem extrapolação.

Partindo-se do princípio que o ponto de máximo e/ou mínimo da variável de interesse é indefinido do domínio antes das simulações numéricas, conclui-se que não há uma sequência de nós em diferentes malhas ( $g$ ) que carregue a informação necessária sem haver outro tipo de erro conforme descrito.

Chapra e Canale (1998) descrevem que, para a técnica de extrapolação de Richardson funcionar adequadamente, os dados de entrada ( $\phi_g$ ) devem:

- Ser uniformemente espaçados – as soluções numéricas ( $\phi_g$ ) são obtidas com a razão de refino ( $r$ ) constante.
- Ser uniformemente gerados em forma sucessiva – as soluções ( $\phi_g$ ) são geradas de forma sucessiva em ( $g$ ) malhas. No entanto, deve-se observar que as soluções numéricas ( $\phi_g$ ) tenham somente erro de discretização e sejam avaliadas em uma mesma posição do domínio.



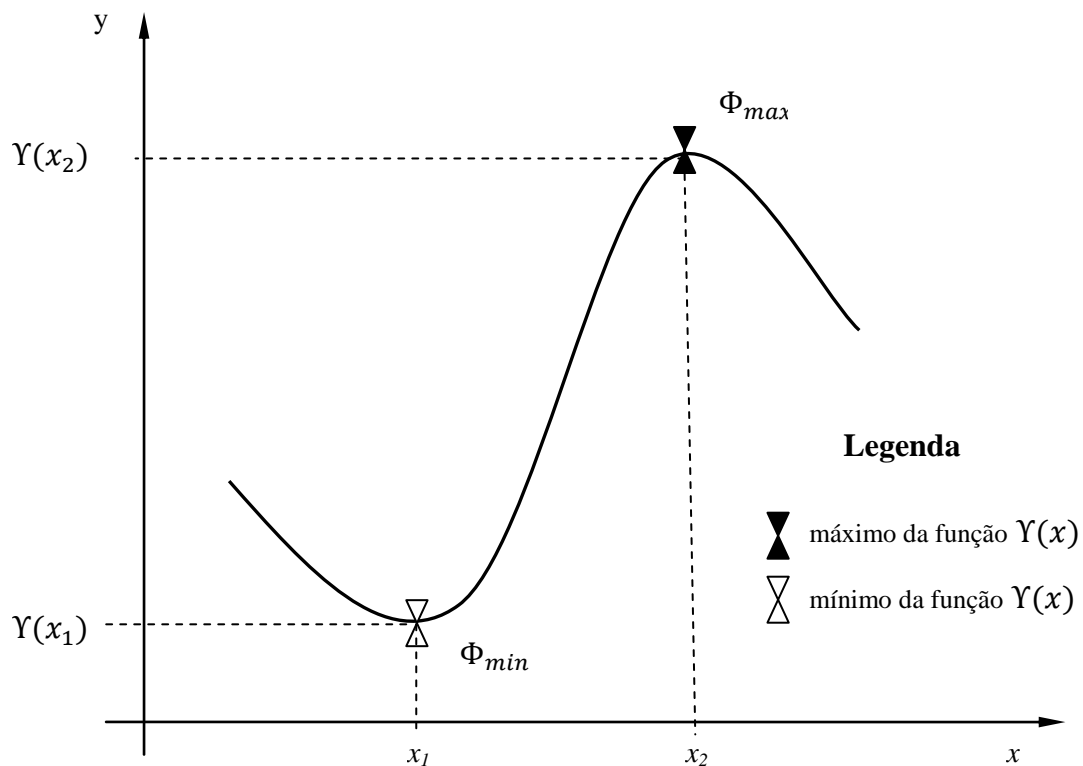
### 3.2.1 Máximo e mínimo de uma função

Na função contínua  $Y(x)$ , representada pela Fig. 3.2, é mostrado um ponto de máximo definido por  $\Phi_{max}$ . Para este máximo da função  $Y(x)$  pode-se afirmar que ele é o maior valor desta função definido por

$$\Phi_{max} \geq Y(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3.19)$$

Analogamente, para o ponto de mínimo ( $\Phi_{min}$ ), pode-se afirmar que este ponto é o menor valor da função  $Y(x)$  definido por

$$\Phi_{max} \leq Y(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3.20)$$



**Figura 3.2 – Máximo e mínimo da função  $Y(x)$ .**

Para avaliar tecnicamente o ponto de máximo e mínimo desta função, tem-se que definir o ponto crítico dela na qual é definido como sendo a derivada desta função igualada a zero. Esta análise para as funções contínuas permite determinar a coordenada ( $x$ ) do ponto onde se encontra um máximo e/ou mínimo. A Eq. (3.21) define matematicamente a definição de ponto crítica e está mostrada a seguir.

$$\frac{dY(x)}{dx} = 0. \quad (3.21)$$

No entanto, com este procedimento não se pode afirmar que as coordenadas obtidas pela solução da Eq. (3.21) são pontos de máximo ou de mínimo. Para tanto, utiliza-se a derivada segunda (JACQUES, 2006) que permite avaliar a concavidade para cada coordenada obtida pela Eq. (3.21):

- Para o valor de máximo ( $\Phi_{max}$ ) - a derivada segunda da função  $Y(x)$  deve ser menor que zero, isto é,

$$\frac{d^{(ii)}Y(x)}{dx^{(ii)}} < 0. \quad (3.22)$$

- Para o valor de mínimo ( $\Phi_{max}$ ) - a derivada segunda da função  $Y(x)$  deve ser maior que zero, isto é,

$$\frac{d^{(ii)}Y(x)}{dx^{(ii)}} > 0. \quad (3.23)$$

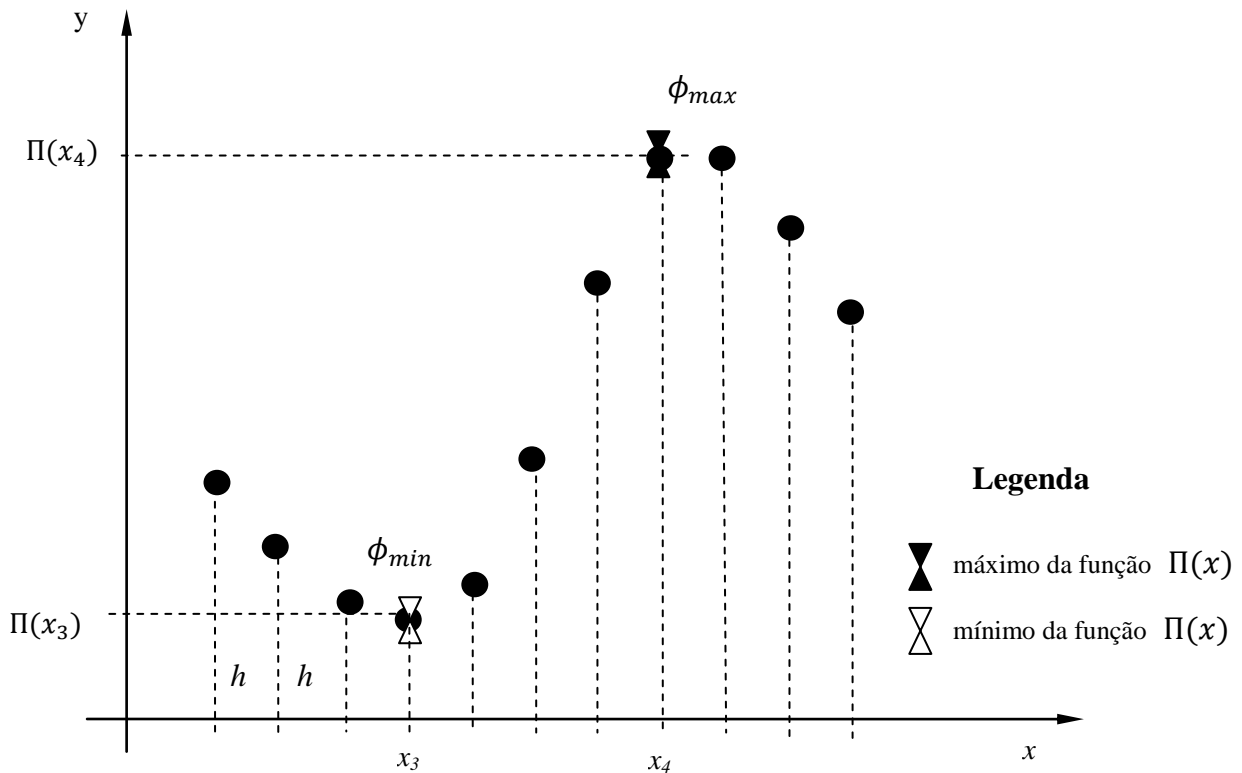
Para a função discreta, mostrada na Fig. 3.3, denominada de  $\Pi(x)$ , o procedimento para determinar os valor máximo e mínimo da função é outro. Primeiramente, observa-se na Fig. 3.3 que a função  $\Pi(x)$  não representa fielmente a função continua  $Y(x)$  devido esta função possuir o erro de discretização ocasionadas pelas aproximações numéricas no modelo matemático. O segundo fato ocorre devido a função  $\Pi(x)$  ser limitada em um número finito de pontos o seu domínio.

Para exemplificar as considerações citadas no parágrafo anterior mostra, na Fig. 3.3, um função discreta com números finitos, isto é,  $i=11$  nós. Esta discretização do domínio da função é uniformemente espaçada possuindo uma malha com tamanho ( $h$ ). É de se esperar que o valor de máximo da função  $\Pi(x)$ , denominado por ( $\phi_{max}$ ), tenha uma posição diferente do valor de máximo da função  $Y(x)$  resultando em ( $\phi_{max} \neq \Phi_{max}$ ), devido as desigualdades entre ( $x_4 \neq x_2$ ).

Para o valor de mínimo desta mesma função definida por  $(\phi_{min})$ , a análise é igual a aplicada ao ponto de máximo, resultando em  $(\phi_{max}) \neq (\phi_{min})$ , devido as desigualdades  $(x_3) \neq (x_1)$ .

Portanto, para definir o valor do máximo e/ou mínimo da função discreta deve-se observar as seguintes considerações:

- Para a variável de interesse do tipo máximo  $(\phi_{max})$  - é a solução numérica  $(\phi_{g_i})$  que possui o maior valor da função  $\Pi(x)$ .
- Para a variável de interesse do tipo mínimo  $(\phi_{min})$  - é a solução numérica  $(\phi_{g_i})$  possui o menor valor da função  $\Pi(x)$ .



**Figura 3.3 – Máximo e mínimo da função  $\Pi(x)$ .**

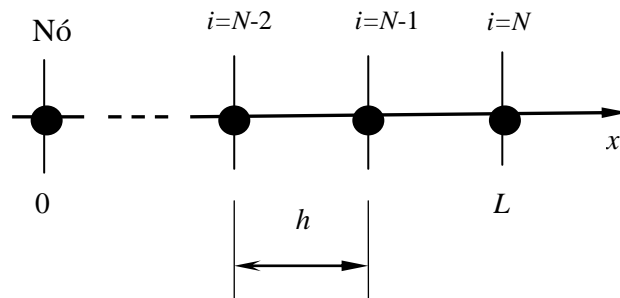
### 3.2.2 Discretização do Domínio de Cálculo

Uma variável é discreta quando possui um número finito de valores dentro de um intervalo fechado (MONTGOMERY e RUNGER, 2003).

As técnicas numéricas em *CHT* trabalham com domínio discreto e obtendo os correspondentes pontos na imagem. A associação é feita a partir de uma função  $\Pi(x)$  discreta. A função  $\Pi(x)$  representa a função  $Y(x)$  contínua. O processo de dividir o domínio contínuo  $[0, L]$  em finitos pontos é chamado de discretização, que consiste em definir em quais pontos se deseja conhecer a variável dependente, construindo sobre o domínio de  $(x)$  uma malha que apresentará um conjunto de pontos, denominados nós (SUERO, 2006). O tamanho de cada elemento de malha  $(h)$  para diferenças finitas aplicadas em um sistema unidimensional e uniforme é definido por (TANNEHILL *et al.*, 1997):

$$h = \frac{L}{N - 1}, \quad (3.24)$$

onde  $(h)$  é a distância entre dois nós consecutivos,  $(L)$  é o tamanho do domínio e  $(N)$  é o número de elementos da malha. O domínio está conectado entre si por meio de elementos finitos  $(h)$  sendo que suas extremidades estão os pontos denominados nós ou pontos nodais  $(N)$ , conforme indica a Fig. 3.4. O domínio discretizado não é contínuo e a informação da variável de interesse limita-se aos pontos nodais pré estabelecidos no domínio. Para o mesmo domínio  $[0, L]$ , quanto menor for  $(h)$ , maior será o número de nós  $(i)$  e maior será a quantidade de informação disponível para análise.



**Figura 3.4 - Discretização do domínio  $[0, L]$  em  $(N)$  elementos.**

### 3.2.3 Erro de discretização no ponto de máximo e/ou mínimo

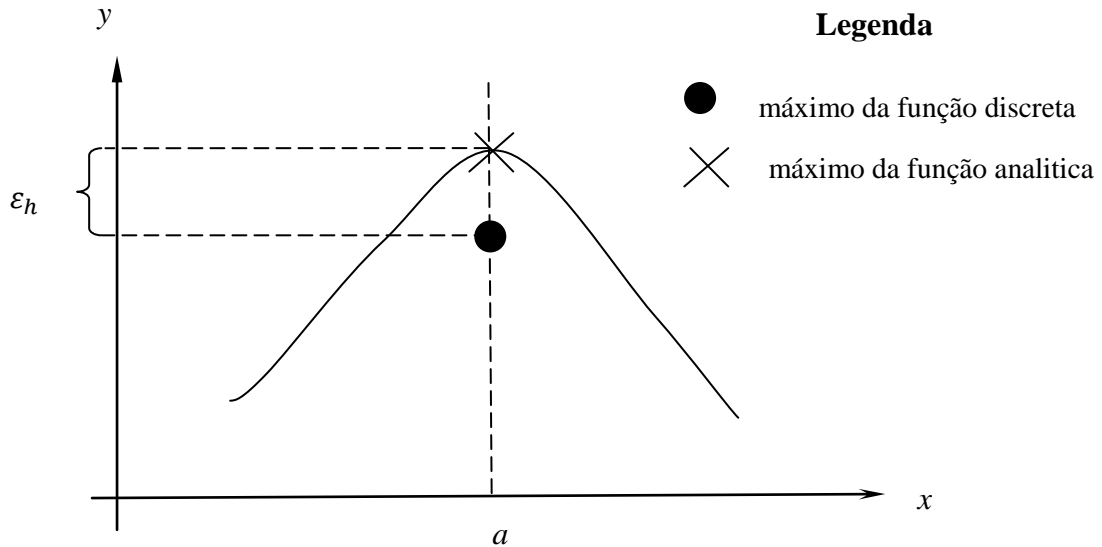
Do ponto de vista clássico, o erro de discretização é definido pela diferença entre solução analítica e numérica de um problema. Para avaliar o erro de discretização, foi

considerado a função contínua  $Y(x)$  e a função discreta  $\Pi(x)$ . Foi definido, também, a hipótese que se conhece a coordenada ( $x$ ) do ponto de máximo da função contínua  $Y(x)$  e que está localizada em  $x = a$  do domínio de  $[0, L]$ .

O erro de discretização ( $\varepsilon_h$ ) para a variável do tipo máximo é a diferença da solução analítica ( $\Phi_{max(a)}$ ) e a solução numérica ( $\phi_{max(a)}$ ) avaliados na coordenada ( $a$ ).

$$\varepsilon_h = \Phi_{max(a)} - \phi_{max(a)}, \quad (3.25)$$

Na fig. 3.5, é mostrado o erro de discretização onde o ponto de máximo da função discreta pode estar localizado em qualquer lugar sobre a reta perpendicular da abscissa que intercepta ( $a$ ) que depende do nível de erro de discretização imposta pela tipo de aproximação do modelo numérico.



**Figura 3.5 – Erro de discretização do máximo da função  $\Pi(x)$ .**

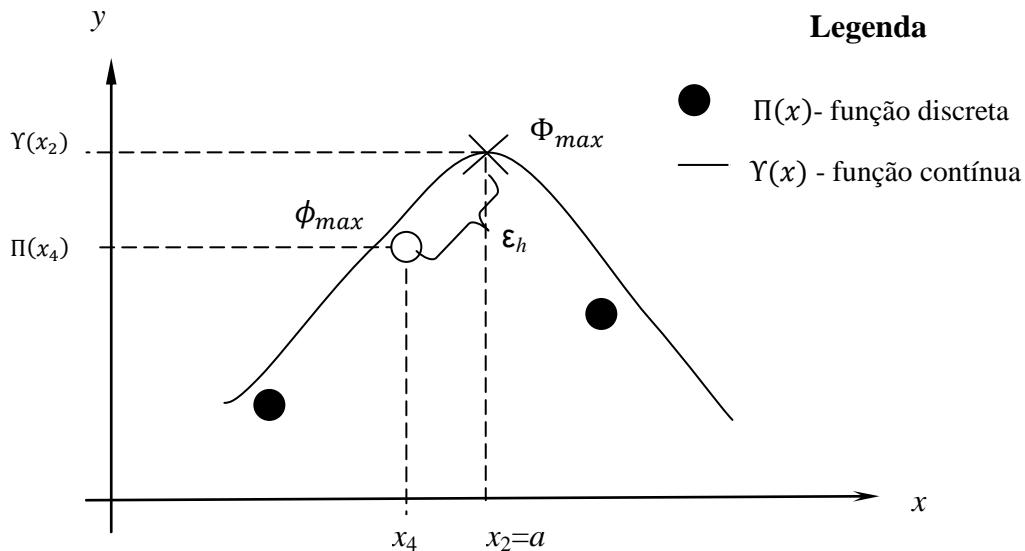
Analogamente, o erro de discretização ( $\varepsilon_h$ ) para a variável do tipo mínimo é definido como sendo a diferença da solução analítica ( $\Phi_{min(a)}$ ) e a solução numérica ( $\phi_{min(a)}$ ) avaliados na mesma coordenada ( $a$ ).

$$\varepsilon_h = \Phi_{min(a)} - \phi_{min(a)}, \quad (3.26)$$

### 3.2.4 Erro de Posição

Entretanto, para a maioria das variáveis de interesse do tipo máximo e/ou mínimo não se conhece a posição ( $a$ ) deste ponto, como mostrado no item anterior. O domínio discretizado possui um número finito de nós e as informações de máximo e/ou mínimo das variáveis de interesse são disponíveis somente nestes pontos. A definição clássica de erro de discretização não detalha esta característica específica para problemas de máximo e/ou mínimo e considera genericamente como sendo erro de discretização.

A Fig. 3.6 é uma composição ampliada da região de máximo das funções contínua  $Y(x)$  e discreta  $\Pi(x)$  das Figs. 3.2 e 3.3. Este gráfico possibilitará observar que os pontos de máximo da função  $Y(x)$  e  $\Pi(x)$  estão avaliados no eixo ( $x$ ) em diferentes posições. Além disso, as Figs. 3.5 e 3.6 mostram qualitativamente que o valor do erro de discretização detalhado na Fig. 3.6 é maior do que o apresentado na Fig. 3.5 devido a solução numérica ( $\phi_{max}$ ) da Fig. 3.5 estar localizada em um ponto qualquer do intervalo  $[Y(a), \Pi(a)]$ . A solução numérica ( $\phi_{max}$ ) da Fig. 3.6 está avaliada em ( $x_4$ ) gerando um erro de discretização maior devido ao deslocamento do ponto ( $a$ ) para ( $x_4$ ).



**Figura 3.6 – Máximo da função  $Y(x)$  e da função  $\Pi(x)$ .**

As soluções  $\phi_g$  obtidas convencionalmente para as variáveis do tipo máximo e mínimo, mesmo com o aumento do erro de discretização como mostrado na Fig. 3.6, atendem a premissa, discutida no capítulo anterior de que o erro de discretização é reduzido com a redução do tamanho ( $h$ ) da malha para variáveis de interesse do tipo máximo e mínimo. Pode-

se afirmar que quando o tamanho ( $h$ ) tende a zero, o módulo da diferença entre os máximos de  $Y(x)$  e  $\Pi(x)$  também tende a zero, isto é,

$$|\Phi_{max} - \phi_{max}| \rightarrow 0. \quad (3.27)$$

Entretanto, quando se deseja utilizar a solução numérica  $\phi_g$  no processo de extrapolação de Richardson para gerar novas soluções numéricas extrapoladas  $\phi_{g,m}$  com  $m=1, 2, 3, \dots, G$  o método não funciona. Isto é devido ao fato de existir um outro tipo de erro, muito significativo, ignorado nas soluções numéricas convencionais e que interfere negativamente no método de Richardson fazendo-o não funcionar. Este novo erro é definido nesta tese como erro de posição.

O erro de posição ( $\varepsilon_D$ ) é definido como a diferença entre soluções numéricas ( $\Pi$ ) avaliados nas pontos ( $x_4$ ) e ( $x_2$ )

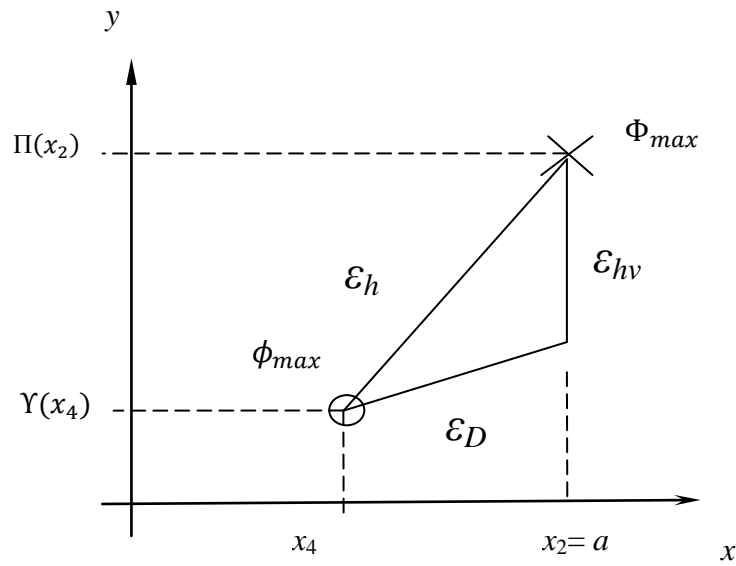
$$\varepsilon_D = \Pi(x_2) - \Pi(x_4), \quad (3.28)$$

em virtude de haver uma diferença entre a coordenada ( $x_4$ ) onde a solução numérica deveria ser avaliada e a coordenada ( $x_2$ ) onde a solução numérica é realmente obtida. Portanto, a solução numérica  $\phi_{max}$  para uso em pós processamento de Richardson deve ser avaliada em ( $a$ ), isto é,

$$\phi_{max} = \Pi(a) = \Pi(x_4). \quad (3.29)$$

O triângulo do erro de posição é mostrado na Fig. 3.7, onde os vértices deste triângulo são definidos pelos seguintes pontos:

- $Y(x_2) = Y(a) = \Phi_{max}$
- $\Pi(x_2) = \Pi(a)$
- $\Pi(x_4) = \phi_{max}$



### Legenda

- Ponto de máximo da função discreta  $\Pi(x)$   
 X Ponto de máximo da função contínua  $Y(x)$

**Figura 3.7 – Erro de posição.**

O erro de discretização ( $\varepsilon_h$ ) definido, nesta tese, como sendo a soma vetorial entre o erro de posição ( $\varepsilon_D$ ) e o erro de discretização verdadeiro ( $\varepsilon_{hv}$ ),

$$\varepsilon_h = \varepsilon_D + \varepsilon_{hv}. \quad (3.30)$$

Quando se conhece a coordenada de interesse, tem-se  $(\varepsilon_D) = 0$ , logo a Eq. (3.30) resulta em

$$\varepsilon_h = \varepsilon_{hv}. \quad (3.31)$$

O erro de posição é reduzido quando é aumentado o número de nós da função discreta  $\Pi(x)$ , considerando o mesmo intervalo  $[0, L]$ . Portanto, o erro de posição da malha mais fina é menor que o erro de posição da

$$\varepsilon D_g < \varepsilon D_{g+1}. \quad (3.32)$$



### 3.2.5 Redução do erro de posição

Para problemas do tipo máximo e mínimo, parte-se da hipótese que não se conhece a solução analítica ( $\Phi$ ) da variável de interesse. Além disso, a solução numérica ( $\phi$ ) e coordenada ( $x$ ) são incógnitas do problema.

Para tomar as decisões a respeito de como proceder para poder reduzir o erro de posição é necessário conhecer a relação de dependência das variáveis de interesse do modelo numérico discretizado. É necessário avaliar as solução numérica máxima ( $\phi_{max}$ ) e/ou mínima ( $\phi_{min}$ ) da variável de interesse e a suas coordenadas máxima ( $x_{max}$ ) e mínima ( $x_{min}$ ) da variável de interesse:

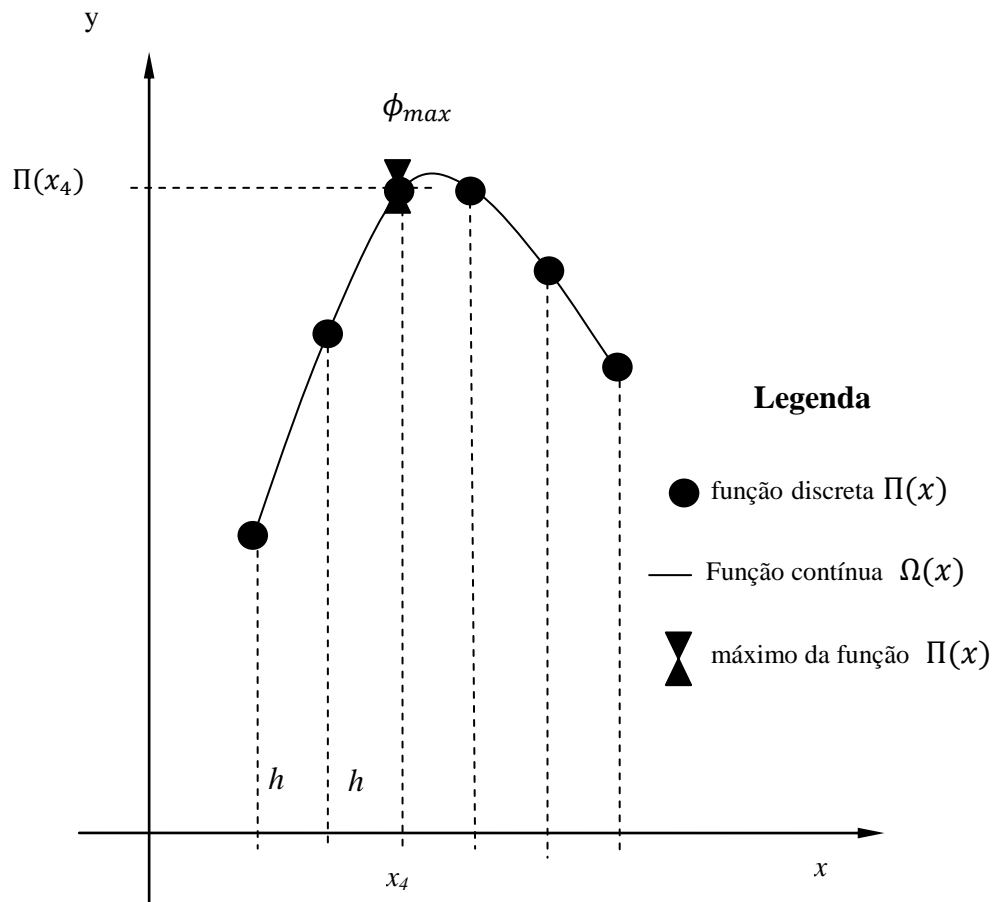
- A variável de interesse máxima ( $\phi_{m\acute{a}x}$ ) e/ou mínima ( $\phi_{min}$ ): para estas variáveis o modelo numérico discretização é função da própria variável de interesse ( $\phi_i$ ), do tamanho ( $h$ ) da malha e da própria coordenada ( $x$ ) ou ( $x,y$ ).
- A coordenada  $x_{m\acute{a}x}$  e/ou  $x_{min}$ : depende da variável de interesse ( $\phi_{m\acute{a}x}$ ) e/ou mínima ( $\phi_{min}$ ).

Portanto, com as afirmações do parágrafo anterior, para a redução do erro de posição, deve-se obter, primeiramente, as soluções numéricas da variável de interesse ( $\phi_i$ ) e definir a informações com base nas soluções numéricas ( $\phi_i$ ) da malha ( $g$ ) determinando o valor máximo ( $\phi_{m\acute{a}x}$ ) e/ou mínimo ( $\phi_{min}$ ) da variável de interesse.

Após a obtenção dos valores de máximo ( $\phi_{m\acute{a}x}$ ) e/ou mínimo ( $\phi_{min}$ ) da variável de interesse, deve-se interpolar uma função contínua polinomial  $\Omega(x)$  utilizando tantos nós ( $i$ ) a direita e a esquerda da solução numérica máxima ( $\phi_{m\acute{a}x}$ ) e/ou mínima ( $\phi_{min}$ ) quanto forem necessários para atender o grau do polinômio interpolador.

Para atender a quantidade de nós necessários para interpolar uma função contínua polinomial deve-se ter uma quantidade de nós compatível com o grau do polinômio interpolador.

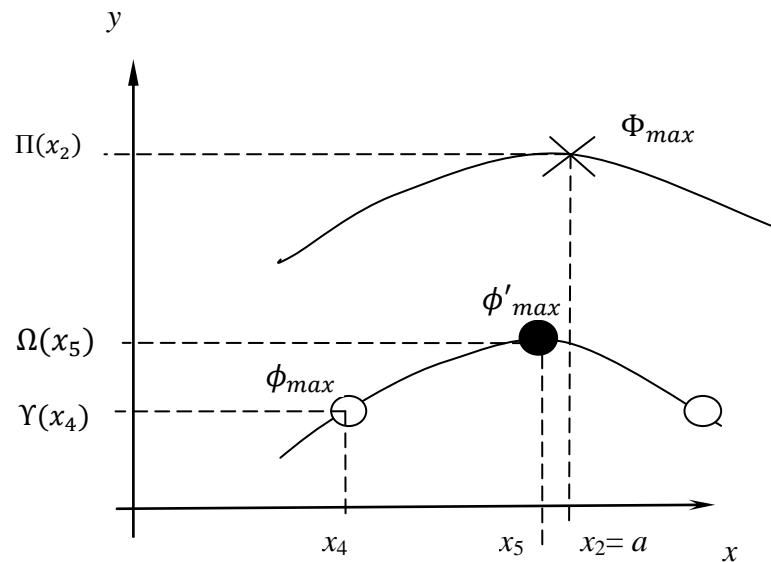
A Fig. 3.8 mostra a função contínua polinomial  $\Omega(x)$  obtida pela interpolação dos nós existentes da malha da função discreta  $\Pi(x)$ . Esta nova função  $\Omega(x)$  é derivável analiticamente nas e, por isso, deve ser utilizado as Eqs. (3.12) até (3.23) para determinar o valor de máximo e/ou mínimo da função  $\Omega(x)$ .



**Figura 3.8 – Interpolação para obtenção da função contínua  $\Omega(x)$  .**

As Eqs. (3.12) até (3.23) vão determinar para a função  $\Omega(x)$  um ponto de máximo e/ou mínimo da função  $\Omega(x)$  diferente do obtido para a função  $\Pi(x)$  na qual está mostrado este novo ponto de máximo na Fig. 3.9 com sendo  $(\phi'_{max})$ . Pode-se observar na figura que o ponto  $(x_5)$  na abscissa esta bem mais próximo de  $(x_2 = a)$  do que  $(x_4)$ . Esta aproximação resulta em uma solução com menor erro de posição fazendo com que  $\epsilon_D$  se aproxime de zero. Desta forma o erro de discretização passa a dominar sobre a solução numérica fazendo com que a extrapolação de Richardson funcione.

Este procedimento cria a oportunidade de obter solução numérica  $(\phi_i)$  fora dos nós da malha  $(g)$  reduzindo o erro de posição existente.



### Legenda

- Pontos da função discreta  $\Pi(x)$
- × Ponto de valor máximo da função contínua  $Y(x)$
- Ponto de valor máximo da função contínua  $\Omega(x)$

**Figura 3.9 – Redução do erro de posição.**

Na Fig. 3.10 o triângulo do erro de posição é mostrado e verifica-se qualitativamente que o erro de posição é reduzido em função da interpolação polinomial de uma função contínua.

O triângulo do erro de posição é mostrado novamente na Fig. 3.10, onde há dois triângulos. O primeiro triângulo possuem seus vértices definidos pelos seguintes pontos:

- D:  $Y(x_2) = Y(a) = \Phi_{\max}$
- C:  $\Pi(x_2) = \Pi(a)$
- A:  $\Pi(x_4) = \phi_{\max}$

O segundo triângulo possuem seus vértices definidos pelos seguintes pontos:

- D:  $Y(x_2) = Y(a) = \Phi_{\max}$
- C:  $\Pi(x_2) = \Pi(a)$
- B:  $\Omega(x_5) = \phi'_{\max}$

A reta  $\overline{AC}$  é a soma de  $\overline{AB}$  com  $\overline{BC}$  resultando em

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}. \quad (3.33)$$

Logo, para  $\overline{AC}$  a Eq. (3.28) é válida. E para  $\overline{BC}$  tem-se

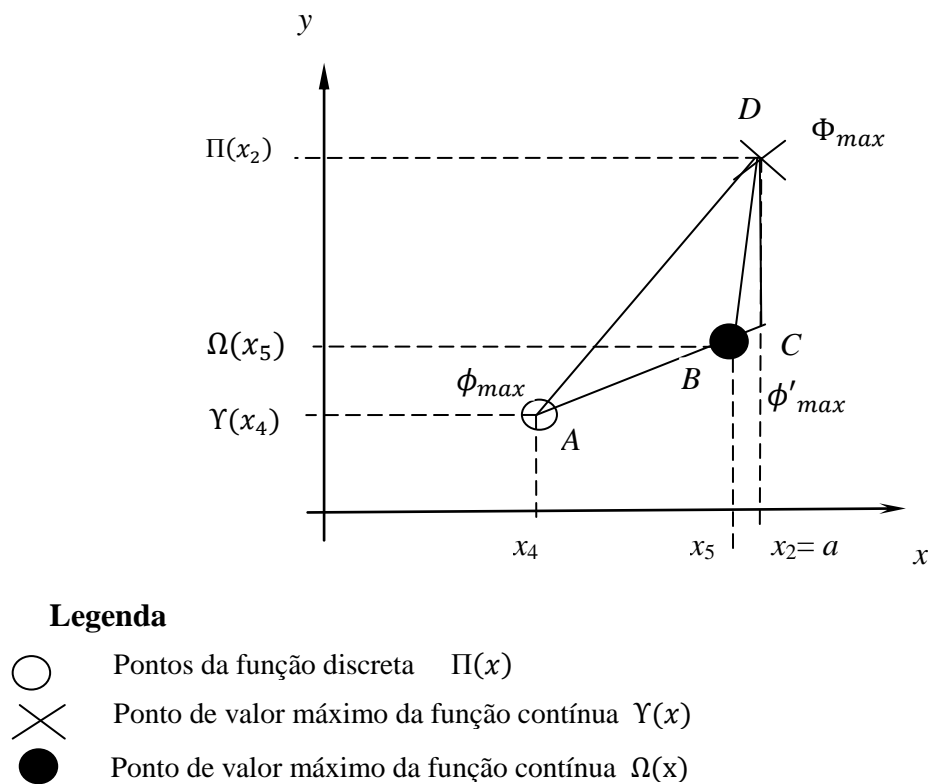
$$\varepsilon_D = \Pi(x_2) - \Omega(x_5), \quad (3.34)$$

resultando em

$$\varepsilon_{D \overline{AC}} > \varepsilon_{D \overline{BC}}, \quad (3.35)$$

e

$$\varepsilon_{D \overline{BC}} \sim 0. \quad (3.36)$$



**Figura 3.10 – Triângulo do erro de posição.**

### 3.2.6 Interpolação polinomial

A interpolação polinomial é a alternativa adotada para minimizar o erro de posição definido na Eq. (3.28). A vantagem de se obter uma função polinomial  $\Omega(x)$  é a simplicidade calcular suas derivadas numericamente.

A interpolação polinomial consiste em determinar o único polinômio de grau  $(n)$  que passa pelos  $(n+1)$  pontos dados (CHAPRA e CANALE, 1998). Há diversas formas de se obter e expressar esse polinômio, optou-se por adotar dois métodos:

- Interpolação quadrática: é quando se pretende aproximar a função  $\Pi(x)$  por um polinômio do segundo grau da forma

$$\Omega(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \quad (3.37)$$

- Interpolação pelo polinômio de Newton: é quando polinômio interpolados se baseia-se numa construção sucessiva a partir dos polinômios de graus inferiores. É utilizado, nesta tese, para aproximar a função  $\Pi(x)$  por um polinômio de grau superior da forma

$$\Omega(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots + c_n x^n \quad (3.38)$$

onde  $n > 2$ .

A interpolação polinomial tem o objetivo, nesta tese, de reduzir o erro de posição nas soluções numéricas sem extrapolação. Deve-se considerar a hipótese de que o erro de posição deve ser reduzido a um valor que torne MER eficiente. Deve-se identificar, portanto, o grau adequado do polinômio para interpolar a função  $\Omega(x)$  que seja viável do ponto de vista técnico.

Os problemas técnicos encontrados para a interpolação numérica pelo polinômio de Newton são:

- Para ordens elevadas ( $n > 10$ ): é introduzido erro de arredondamento indesejado devido a quantidade de cálculos numéricos executados para a obtenção dos coeficientes  $(a_n)$  do polinômio  $(\Omega(x))$ . Desta forma, o erro de arredondamento é introduzido negativamente nas soluções  $(\phi'_{max})$  na qual tornarão MER ineficiente.

- O efeito negativo na interpolação polinomial quando o tamanho de malha ( $h$ ) é muito pequeno: os pares ordenados formados por  $(x, \Pi(x))$ , base para a Eq. (3.8), se tornam muito próximos um dos outros, variando para cada par ordenado apenas poucas casas decimais. Este efeito provoca excessivos erros de arredondamento nos cálculos, tornando os coeficientes  $(a_n)$  totalmente inconsistentes.

Deve-se, portanto, avaliar, para cada problema, a ordem ( $n$ ) do polinômio interpolador que resulte em melhores resultados de  $(\phi'_{max})$  e/ ou  $(\phi'_{min})$  para as malhas ( $g$ ) que seja capaz de obter a eficiência desejada ao utilizar as múltiplas extrapolações de Richardson.

### 3.2.6.1 Interpolação polinomial quadrática

A Eq. (3.39) é a forma conveniente para o polinômio quadrático, que é definido por (CHAPRA e CANALE, 1998)

$$\Omega(x) = c_{b-h} + c_b(x - x_{b-h}) + c_{b+h}(x - x_{b-h})(x - x_b), \quad (3.39)$$

onde para simplificar usa-se  $b = x_4$  e os pares ordenados conhecidos da função discreta  $\Pi(x)$  são:

- $(x_{b-h}, \phi_{max-h})$ ,
- $(x_b, \phi_{max})$ , e
- $(x_{b+h}, \phi_{max+h})$ .

A Eq. (3.39) para  $(x = x_{b-h})$  resulta

$$c_{b-h} = \phi_{max-h}; \quad (3.40)$$

substituindo na Eq. (3.39) Eq. (3.40) e fazendo  $(x = x_b)$ , obtém-se

$$c_b = \frac{\phi_{max} - \phi_{max-h}}{x_b - x_{b-h}}. \quad (3.41)$$

Substituindo as Eqs. (3.40) e (3.41) em (3.39), resulta em

$$c_{b+h} = \frac{\frac{\phi_{max+h} - \phi_{max}}{x_{b+h} - x_b} - \frac{\phi_{max} - \phi_{max-h}}{x_b - x_{b-h}}}{x_{b+h} - x_{b-h}}. \quad (3.42)$$

### 3.2.6.2 Interpolação polinomial de grau $n > 2$

A forma geral de Newton para um polinômio  $\Omega(x)$  é representado pela Eq. (3.43) e definido por (CHAPRA e CANALE, 1998)

$$\begin{aligned} \Omega(x) = & c_{b-n*h} + c_{b-(n-1)*h} (x - x_{b-n*h}) + c_{b-(n-2)*h} (x - x_{b-n*h})(x - \\ & x_{b-(n-1)*h}) + \dots + c_{b+(n-1)*h} (x - x_{b-n*h})(x - x_{b-(n-1)*h}) \dots (x - x_{b+n*h}). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Os pares ordenados obtidos pela função discreta  $\Pi(x)$  são:

- $(x_{b-n*h}, \phi_{max-n*h}),$
- ...
- $(x_{b-h}, \phi_{max-h}),$
- $(x_b, \phi_{max}),$
- ...
- $(x_{b+n*h}, \phi_{max+n*h}).$

Para obter os coeficientes da Eq. (3.43) deve-se utilizar os pares ordenados conhecidos e listados no parágrafo anterior. O procedimento inicia-se fazendo para o primeiro par ordenado  $(x_{b-n*h}, \phi_{max-n*h})$  a substituição dele na Eq. (3.43), isto é,  $\Omega(x) = \phi_{max-n*h}$  e  $x = x_{b-n*h}$  resultando em

$$c_{b-n*h} = \phi_{max-n*h}. \quad (3.44)$$

Para obter o coeficiente  $c_{b-(n-1)*h}$  da Eq. (3.45) deve-se substituir o coeficiente  $c_{b-n*h}$  obtido por meio da Eq. (3.44) na Eq. (3.43). Deve-se também fazer a substituição do segundo para ordenado  $(x_{b-(n-1)*h}, \phi_{max-(n-1)*h})$  na mesma equação, ou seja,  $\Omega(x) = \phi_{max-(n-1)*h}$  e  $x = x_{b-(n-1)*h}$ .

$$c_{b-(n-1)*h} = \frac{\phi_{max-n*h} - \phi_{max-(n-1)*h}}{x_{b-n*h} - x_{b-(n-1)*h}} \quad (3.45)$$

Para obter o coeficiente  $c_{b-(n-1)*h}$  da Eq. (3.46) deve-se substituir os coeficientes  $c_{b-(n-1)*h}$  e  $c_{b-n*h}$  obtidos por meio das Eqs. (3.44) e (3.45) na Eq. (3.43). Deve-se também fazer a substituição do terceiro para ordenado  $(x_{b-(n-2)*h}, \phi_{max-(n-2)*h})$  na mesma equação, ou seja,  $\Omega(x) = \phi_{max-(n-2)*h}$  e  $x = x_{b-(n-2)*h}$ .

$$c_{b-(n-2)*h} = \frac{\frac{\phi_{max-(n-2)*h} - \phi_{max-(n-1)*h}}{x_{b-(n-2)*h} - x_{b-(n-1)*h}} - \frac{\phi_{max-(n-1)*h} - \phi_{max-n*h}}{x_{b-(n-1)*h} - x_{b-n*h}}}{x_{b-(n-1)*h} - x_{b-n*h}}. \quad (3.46)$$

Para obter os outros coeficientes da Eq. (3.43), deve-se seguir o procedimento já adotado para obtenção dos coeficientes  $c_{b-n*h}$  a  $c_{b-(n-2)*h}$ .

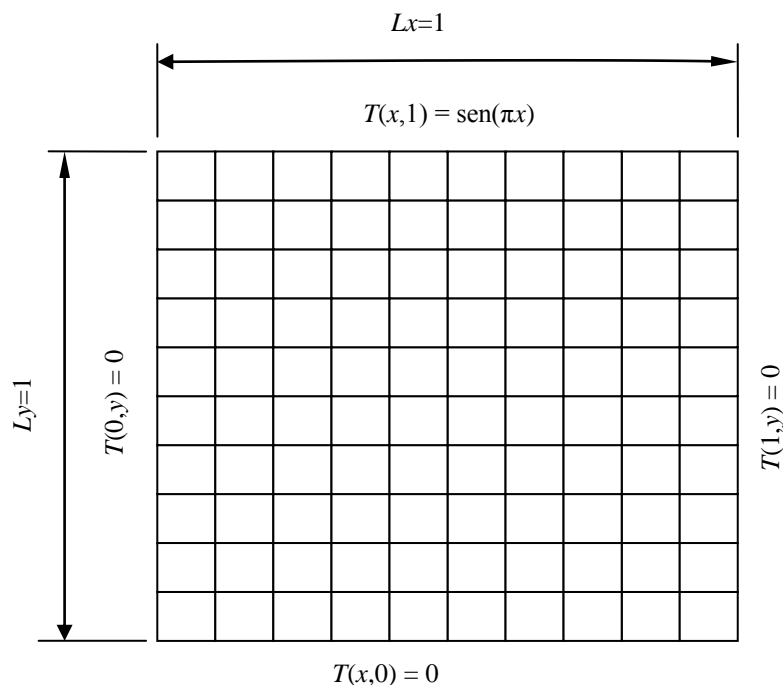


## 4 EQUAÇÃO DE LAPLACE BIDIMENSIONAL

Neste capítulo, é testada a metodologia de MER em um problema de condução de calor, modelado pela equação de Laplace bidimensional com condições de contorno de Dirichlet, conforme Fig. 4.1. Será utilizado um domínio  $L_x=1$  e  $L_y=1$ , isto é, uma placa plana quadrada com condutividade térmica do material  $k=1$  (W/m.K). As variáveis de interesse são a temperatura  $\phi = T_{(x,y)}$  em alguns pontos do domínio, a média do campo de temperaturas, a taxa de transferência de calor em dois contornos e a norma ( $L$ ) do erro de discretização.

Resolver a equação de Laplace bidimensional tanto analítica quanto numericamente é um processo trivial. Entretanto, é um equacionamento estável e confiável, ideal para testar outra ferramenta como, neste caso, MER.

Introduziu-se na programação numérica o *multigrid* como meio de acelerar a convergência das soluções numéricas sem extrapolação, obtendo resultados em malhas muito mais finas. Desta forma, pode-se ter mais malhas ( $g$ ) possibilitando testar MER em maior número de malhas.



**Figura 4.1 - Malha quadrada representando uma placa.**

São consideradas variáveis primárias e secundárias neste capítulo devido a necessidade de verificar e generalizar a múltipla extrapolação de Richardson. Além disso, é utilizada precisão dupla e quádrupla nos cálculos com MER para analisar o comportamento do método com a variação de precisão.

#### 4.1 MODELO MATEMÁTICO

Os processos físicos relacionados à difusão referem-se às atividades atômicas e moleculares do meio em que está ocorrendo o fenômeno. A difusão, no caso específico da condução de calor, é vista como a transferência de energia de partículas mais energéticas para partículas de menor energia devido às interações entre elas (INCROPERA e DeWITT, 1999). O modelo matemático empregado é a equação da difusão bidimensional, em regime permanente, para material com propriedades termofísicas constantes, sem geração de calor, com condições de contorno de Dirichlet, como detalhado na Fig. 4.1, e assim definido:

$$T(x, 0) = T(0, y) = T(1, y) = 0, \quad (4.1)$$

e

$$T(x, 1) = \text{sen}(\pi x). \quad (4.2)$$

A equação de Laplace bidimensional (LOMAX *et al.*, 2003) é definida pela equação

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad (4.3)$$

para  $0 \leq x \leq 1$  e  $0 \leq y \leq 1$ , onde  $(x)$  e  $(y)$  são as coordenadas espaciais e  $(T)$  é a temperatura. Para a Eq. (4.3) juntamente com as Eqs. (4.1) e (4.2) existem diversos métodos analíticos e numéricos que possibilitam a solução do problema. Dentre os mais utilizados encontram-se o método de separação de variáveis (OZISIK, 1994 ; BOYCE, 1995) e a análise por diferenças finitas.

As variáveis de interesse para este problema são:

- Variável primária local: temperatura ( $T_C$ ) definida pela solução da Eq. (4.3) e condições de contorno Eqs. (4.1) e (4.2) no ponto

$$x = y = \frac{1}{2}. \quad (4.4)$$

- Variável primária local: temperatura ( $T_2$ ) definida pela solução da Eq. (4.3) no ponto

$$x = \frac{1}{2} \quad ; \quad y = \frac{3}{4}. \quad (4.5)$$

- Variável secundária global: temperatura média ( $T_m$ ) definida por

$$T_m = \frac{1}{L_x L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} T(x, y) dy dx, \quad (4.6)$$

sendo  $L_x = L_y = 1$ .

- Variável secundária local: taxa de transferência de calor na face leste ( $Q_e$ ) definida por

$$Q_e = -k \int_0^{L_y} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=1} dy. \quad (4.7)$$

- Variável secundária local: taxa de transferência de calor na face norte ( $Q_n$ ) definida por

$$Q_n = -k \int_0^{L_x} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=1} dx. \quad (4.8)$$

Para verificação das soluções numéricas sem extrapolação e a evolução da redução do erro de discretização, por meio da utilização de MER, será utilizada a solução analítica da Eq. (4.3) e condições de contorno Eqs. (4.1) e (4.2) que é

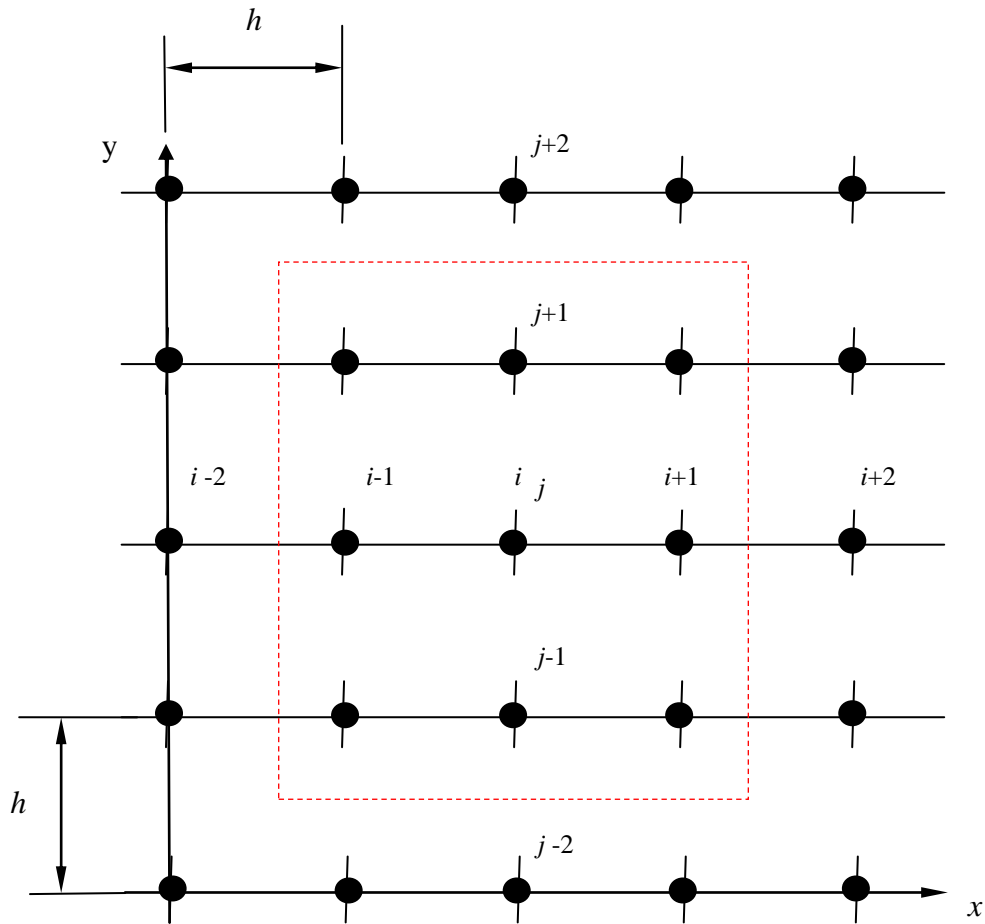
$$T(x, y) = \text{sen}(\pi x) \frac{\text{senh}(\pi y)}{\text{senh}(\pi)}. \quad (4.9)$$

## 4.2 MODELO NUMÉRICO

O modelamento numérico proposto é resolvido por meio do método de diferenças finitas. Os elementos da malha são quadrados e uniformemente distribuídos ao longo do

domínio. A razão de refino é compatível com os diferentes tamanhos ( $h$ ) de malha e o erro de posição igual a zero ( $\varepsilon_D = 0$ ) para as variáveis de interesse que necessitam de coordenadas.

Para a discretização da Eq. (4.3) utilizou-se para as derivadas de segunda ordem o esquema *CDS* que é uma aproximação de segunda ordem de acurácia, conforme descrito a seguir.



**Figura 4.2 - Malha bidimensional com 25 nós.**

A aproximação numérica da derivada segunda por *CDS* utilizando a série de Taylor. O procedimento a seguir demonstra esta aproximação. Inicia-se o processo expandindo a Série de Taylor para a coordenada ( $x$ ) um ponto a jusante:

$$\begin{aligned}
 T(x_{i-1}) = T(x_i) - T^{(i)}(x_i) h + T^{(ii)}(x_i) \frac{h^2}{2} - T^{(iii)}(x_i) \frac{h^3}{6} + T^{(iv)}(x_i) \frac{h^4}{24} \\
 - T^{(v)}(x_i) \frac{h^5}{120} + \dots
 \end{aligned}
 \tag{4.10}$$

e outro ponto a montante:

$$T(x_{i+1}) = T(x_i) + T^{(i)}(x_i)h + T^{(ii)}(x_i)\frac{h^2}{2} + T^{(iii)}(x_i)\frac{h^3}{6} + T^{(iv)}(x_i)\frac{h^4}{24} + T^{(v)}(x_i)\frac{h^5}{120} + \dots; \quad (4.11)$$

fazendo a soma das Eqs. (4.10) e (4.11), resulta

$$T(x_{i+1}) + T(x_{i-1}) = 2 T(x_i) + T^{(ii)}(x_i)h^2 + T^{(iv)}(x_i)\frac{h^4}{12} + \dots; \quad (4.12)$$

isolando a derivada de segunda ordem da Eq. (4.12):

$$T^{(ii)}(x_i) = \frac{T(x_{i-1}) - 2 T(x_i) + T(x_{i+1}))}{h^2} - T^{(iv)}(x_i)\frac{h^4}{12} - T^{(vi)}(x_i)\frac{h^6}{360} - T^{(viii)}(x_i)\frac{h^8}{20160} \dots; \quad (4.13)$$

Adotando o mesmo procedimento anterior para a coordenada (y),

$$T^{(ii)}(x_j) = \frac{T(x_{j-1}) - 2 T(x_j) + T(x_{j+1}))}{h^2} - T^{(iv)}(x_j)\frac{h^4}{12} - T^{(vi)}(x_j)\frac{h^6}{360} - T^{(viii)}(x_j)\frac{h^8}{20160} \dots; \quad (4.14)$$

Substituindo as Eqs. (4.13) e (4.14) na Eq. (4.13) e fazendo

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \cong T^{(ii)}(x_i) \quad e \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \cong T^{(ii)}(x_j),$$

resulta a equação discretizada

$$\frac{T(x_{i-1}) - 2 T(x_i) + T(x_{i+1}))}{h^2} + \frac{T(x_{j-1}) - 2 T(x_j) + T(x_{j+1}))}{h^2} = 0. \quad (4.15)$$

A Eq. (4.15) tem acurácia de segunda ordem. As ordens verdadeiras do erro de discretização, obtidas *a priori*, têm valor 2,4,6,8.... sendo a ordem assintótica 2 observada nas Eqs. (4.14) e (4.15). As variáveis locais ( $T_C$ ) e ( $T_2$ ) são analisados para pontos específicos da malha. Apesar de o procedimento descrito nas Eqs. (4.10) até (4.15) ser conhecido na

literatura especializada, neste momento é importante detalhá-lo para evidenciar as ordens verdadeiras do erro de discretização. Por meio da metodologia de MER, será possível demonstrar *a posteriori* esses mesmos valores obtidos *a priori* para certos tipos de variáveis.

A temperatura média ( $T_m$ ) é obtida por meio da integração numérica pela regra do trapézio (KREYSZIG, 1999). As ordens do erro para ( $T_m$ ) *a priori* são 2,4,6,...

As soluções para a taxa de calor ( $Q_e$ ) e ( $Q_n$ ) são obtidas por meio de integração numérica pela regra do trapézio antecedida pelo uso do esquema UDS-2 (TANNEHILL *et al.*, 1997). As ordens do erro são 2,3,4,...

A média da norma  $L1$  do erro de discretização é definida pela Eq. (4.16)

$$L1 = \frac{\sum_{k=1}^N |T_k^{analítico} - T_k^{numérico}|}{N}, \quad (4.16)$$

onde ( $k$ ) representa cada um dos nós da malha e ( $N$ ) representa todos os nós da malha. As ordens do erro são 2,4,6,...

### 4.3 METODOLOGIA

Para as soluções do modelamento numérico foi utilizado um microcomputador com um processador Intel® Xeon Quad Core X5355 com 2,66 GHz e com 16GB memória RAM e sistema operacional Windows® XP 64 bits. O *software* utilizado para a obtenção da solução analítica foi o Maple® 7.00. Para os cálculos efetuados com esse *software* utilizou-se precisão de 50 casas decimais.

Para as soluções numéricas os programas foram elaborados em Fortran® 95, versão 9.1 da Intel®, usando precisão dupla (real\*8) e precisão quádrupla (real\*16).

As soluções numéricas sem extrapolação do sistema de equações resultante da Eq. (4.15) e condições de contorno foram obtidas com MSI (*Modified Strongly Implicit Method*) com tolerância de  $-1,000000000 \times 10^{-1}$  e *multigri* como acelerador de convergência. As componentes do *multigrid* são: esquema FAS (*Full Approximation Scheme*), ciclo V, restrição por injeção, prolongação por interpolação bilinear e razão de engrossamento dois. O número de vezes que o ciclo V do método *multigrid* é repetido é denominado iterações externas, sendo igual a 50. O número de iterações internas utilizado foi no máximo igual a 8. Como estimativa inicial foi adotado o valor zero para cada problema. O processo iterativo foi levado até atingir o erro de arredondamento de máquina para solução das variáveis de interesse. O programa desenvolvido para as soluções numéricas sem extrapolação é denominado

LP\_2008\_64\_BITS na qual coloca em prática os modelos numéricos. As soluções numéricas com extrapolação foram obtidas por meio do pós-processamento utilizando MER. O programa atualizado que calcula os resultados numéricos com MER denomina-se Richardson\_3p0. Este programa coloca em prática os conceitos de MER discutidos nos Caps. 3 e 4.

#### 4.4 RESULTADOS

Os resultados das soluções numéricas em precisão dupla e quádrupla, sem extrapolação, das variáveis de interesse estão representados nas Tabs. 4.1 e 4.2.

Para precisão dupla, as malhas utilizadas foram 3x3, 5x5, 9x9, ... até 8193x8193, isto é,  $g=12$ .

**Tabela 4.1 – Valores numéricos obtidos para as variáveis  $T_c$ ,  $T_2$ ,  $T_m$ ,  $Q_e$  e  $Q_n$  com precisão dupla.**

$g$	Malha	$T_c$ (K)	$T_2$ (°K)	$T_m$ (K)
0	3x3	2,5000000000000000e-01	NA	1,8750000000000000e-01
1	5x5	2,133883476483184e-01	NA	1,908986628323782e-01
2	9x9	2,029152235218276e-01	NA	1,874672742674199e-01
3	17x17	2,001880229640515e-01	4,537806753127554e-01	1,862806579876910e-01
4	33x33	1,994988165854051e-01	4,529617145016377e-01	1,859620913975416e-01
5	65x65	1,993260416376187e-01	4,527562318260793e-01	1,858810564917647e-01
6	129x129	1,992828181477035e-01	4,527048144582445e-01	1,858607103053255e-01
7	257x257	1,992720104130047e-01	4,526919571929576e-01	1,858556182864602e-01
8	513x513	1,992693083629209e-01	4,526887426938874e-01	1,858543449396471e-01
9	1025x1025	1,992686328430914e-01	4,526879390576574e-01	1,858540265815529e-01
10	2049x2049	1,992684639627249e-01	4,526877381479156e-01	1,858539469907025e-01
11	4097x4097	1,992684217426638e-01	4,526876879205233e-01	1,858539270929320e-01
12	8193x8193	1,992684111877090e-01	4,526876753639588e-01	1,858539221185398e-01

$g$	Malha	$Q_e$ (W)	$Q_n$ (W)
0	3x3	7,5000000000000000e-01	-7,5000000000000000e-01
1	5x5	8,946067811865477e-01	-1,281336321356054e+00
2	9x9	9,132861795885330e-01	-1,623963668394075e+00
3	17x17	9,163086360410141e-01	-1,812452925714116e+00
4	33x33	9,169492978576036e-01	-1,909498675897294e+00
5	65x65	9,171020725172452e-01	-1,958425170640899e+00
6	129x129	9,171398009514844e-01	-1,982944860186459e+00
7	257x257	9,171492039311143e-01	-1,995212797918688e+00
8	513x513	9,171515528546949e-01	-2,001348009462359e+00
9	1025x1025	9,171521399717018e-01	-2,004415826577430e+00
10	2049x2049	9,171522867439658e-01	-2,005949775445733e+00
11	4097x4097	9,171523234369036e-01	-2,006716758385445e+00
12	8193x8193	9,171523326099151e-01	-2,007100251783917e+00

NA: valor inexistente.

Para precisão quádrupla atingiu-se até a malha 4097x4097, portanto  $g=11$ .

**Tabela 4.2 - Valores numéricos obtidos para as variáveis  $T_c$ ,  $T_2$ ,  $T_m$ ,  $Q_e$  e  $Q_n$  com precisão quádrupla.**

$g$	Malha	$T_c$ (K)	$T_2$ (K)
0	3x3	2,500000000000000000000000000000e-01	NA
1	5x5	2,13388347648318440550105545263106e-01	NA
2	9x9	2,02915223521827643544500372420873e-01	NA
3	17x17	2,00188022964051459940078588838138e-01	4,53780675312755246196160896311431e-01
4	33x33	1,99498816585405126953842022419956e-01	4,52961714501638078682713059299108e-01
5	65x65	1,99326041637617006794169496115016e-01	4,52756231826077278275747459203198e-01
6	129x129	1,99282818147703110992801706628851e-01	4,52704814458246236256701526388922e-01
7	257x257	1,99272010413013183225536686816414e-01	4,52691957192968525175571247902661e-01
8	513x513	1,99269308362910985036797119708079e-01	4,52688742693869017749432531678484e-01
9	1025x1025	1,99268632843107929474872530584075e-01	4,52687939057669251249462870091549e-01
10	2049x2049	1,99268463962702311320566995441332e-01	4,52687738147905236290429055258675e-01
11	4097x4097	1,99268421742572478232092181079543e-01	4,52687687920419602690232490198047e-01

$g$	Malha	$T_m$ (K)	$Q_e$ (W)
0	3x3	1,875000000000000000000000000000e-01	7,500000000000000000000000000000e-01
1	5x5	1,90898662832378148153250334999939e-01	8,94606781186547524400844362104849e-01
2	9x9	1,87467274267419889821235462351880e-01	9,13286179588532776020437417774354e-01
3	17x17	1,86280657987690843810642980680824e-01	9,16308636041013664380905599321289e-01
4	33x33	1,85962091397541372037734685245441e-01	9,16949297857603415749161632959661e-01
5	65x65	1,85881056491764510355759359929910e-01	9,17102072517242345869368807882440e-01
6	129x129	1,85860710305325364361040548078565e-01	9,17139800951482541796456812464513e-01
7	257x257	1,85855618286464271474330886831590e-01	9,17149203931135244626681255091502e-01
8	513x513	1,85854344939639347055099527439316e-01	9,17151552854678044615446901217790e-01
9	1025x1025	1,85854026581549794204613010736512e-01	9,17152139971715377443053209152339e-01
10	2049x2049	1,85853946990690925434269521543532e-01	9,17152286743858988952254447864673e-01
11	4097x4097	1,85853927092892677848243781297467e-01	9,17152323436450156117907385210727e-01

$g$	Malha	$Q_n$ (W)
0	3x3	-7,500000000000000000000000000000e-01
1	5x5	-1,2813363213560543136009649852628e+00
2	9x9	-1,62396366839407444925242031102055e+00
3	17x17	-1,81245292571411632714934172813516e+00
4	33x33	-1,90949867589729247765051116870470e+00
5	65x65	-1,95842517064090358783909263092239e+00
6	129x129	-1,98294486018645635101438039271584e+00
7	257x257	-1,99521279791865055226098400665065e+00
8	513x513	-2,00134800946238532541068546185166e+00
9	1025x1025	-2,00441582657743037259630213000425e+00
10	2049x2049	-2,00594977544582935162245432141130e+00
11	4097x4097	-2,00671675838533232578612532810146e+00

NA: valor inexistente.

O erro de arredondamento de máquina é o erro devido a representação finita dos números no computador. Para atingir este erro, o tempo máximo de *CPU*, para a malha mais fina 8193x8193, em precisão dupla e 50 iterações externas, foi de 3h23min22s; já para a malha mais fina 4097x4097, em precisão quádrupla e 20 iterações externas, o tempo foi de 1h57min54s. As iterações externas foram suficientes para atingir o erro de arredondamento de máquina. Na Tab. 5.3 é mostrado que os erros de arredondamento de máquina acontecem aproximadamente em 5 iterações externas para precisão dupla e, para precisão quádrupla, acontecem com aproximadamente 11 iterações externas.



Tabela 4.3 – Iterações Externas para atingir o erro de arredondamento de máquina.

Iterações Externas	$T_c$ Numérico	$T_c$ Numérico
	<i>real*8</i> → 13ª Malha	<i>real*16</i> → 12ª Malha
1	0,0000000000000000e+00	4,02924217877668953826603464619858e-336
2	1,990890852271615e-01	1,99089097172425334487598593159582e-01
3	1,992682292048621e-01	1,99268239762687582418254845059863e-01
4	1,992684110249286e-01	1,99268421580109260231643005665022e-01
5	1,992684111877541e-01	1,99268421742429006172913394218150e-01
6	1,992684111875611e-01	1,99268421742572353197178902152227e-01
7	1,992684111875612e-01	1,99268421742572478123356337765286e-01
8	1,992684111873360e-01	1,99268421742572478231997710708793e-01
9	1,992684111876094e-01	1,99268421742572478232092098973490e-01
10	1,992684111877078e-01	1,99268421742572478232092181008299e-01
11	1,992684111877144e-01	1,99268421742572478232092181079552e-01
12	1,992684111877820e-01	1,99268421742572478232092181079544e-01
13	1,992684111876669e-01	1,99268421742572478232092181079645e-01
14	1,992684111873125e-01	1,99268421742572478232092181079602e-01
15	1,992684111872915e-01	1,99268421742572478232092181079604e-01
16	1,992684111873638e-01	1,99268421742572478232092181079671e-01
17	1,992684111877645e-01	1,99268421742572478232092181079533e-01
18	1,992684111874294e-01	1,99268421742572478232092181079698e-01
19	1,992684111875337e-01	1,99268421742572478232092181079644e-01
20	1,992684111875969e-01	1,99268421742572478232092181079543e-01
21	1,992684111875833e-01	NA
22	1,992684111874422e-01	NA
23	1,992684111873862e-01	NA
24	1,992684111878018e-01	NA
25	1,992684111876600e-01	NA
26	1,992684111876467e-01	NA
27	1,992684111876663e-01	NA
28	1,992684111874714e-01	NA
29	1,992684111874343e-01	NA
30	1,992684111876510e-01	NA
31	1,992684111878230e-01	NA
32	1,992684111875913e-01	NA
33	1,992684111874938e-01	NA
34	1,992684111877033e-01	NA
35	1,992684111875016e-01	NA
36	1,992684111875349e-01	NA
37	1,992684111875784e-01	NA
38	1,992684111874276e-01	NA
39	1,992684111875217e-01	NA
40	1,992684111876448e-01	NA
41	1,992684111876495e-01	NA
42	1,992684111875841e-01	NA
43	1,992684111875619e-01	NA
44	1,992684111873080e-01	NA
45	1,992684111875115e-01	NA
46	1,992684111876102e-01	NA
47	1,992684111876973e-01	NA
48	1,992684111873085e-01	NA
49	1,992684111873302e-01	NA
50	1,992684111877090e-01	NA

NA: valor inexistente.

Para medir o erro com a Eq. (1.1), a solução analítica ( $\Phi$ ) das variáveis ( $T_c$ ), ( $T_2$ ), ( $T_m$ ), ( $Q_e$ ) e ( $Q_n$ ) foi obtida com 12 e 30 algarismos para precisão dupla e quádrupla respectivamente, por meio do *software* Maple.

Os resultados deste capítulo mostram, com base nas variáveis de interesse, para MER e para o estimador de Richardson:

- O efeito da precisão dos cálculos das soluções numéricas como aperfeiçoamento para utilizar MER.
- A efetiva redução do erro de discretização com MER e sua estimativa com Richardson.
- Verificação de ordens de erro e suas consequências para MER.

#### 4.3.1 Efeito da precisão dos cálculos das soluções numéricas

A precisão dos cálculos para variáveis  $(T_C)$ ,  $(T_2)$ ,  $(T_m)$ ,  $(L1)$ ,  $(Q_e)$  e  $(Q_n)$  afeta significativamente MER. A Tab. 4.4 mostra para a variável  $(T_C)$  as diferenças entre os resultados numéricos sem extrapolação obtidos em precisão dupla e quádrupla. Os valores foram extraídos da Tabs. 4.1 e 4.2 da variável  $(T_C)$  especificamente na malha 513x513. Na Tab. 4.4, os números em negrito e grifados representam os algarismos onde se inicia-se o erro de arredondamento.

**Tabela 4.4 – Cálculo da diferença entre precisão dupla e quádrupla para a variável  $(T_C)$ .**

	13 <sup>a</sup> casa decimal ↓
(a) $T_C$ em precisão dupla:	1,992693083629 <b>209</b> e-01
(b) $T_C$ em precisão quádrupla:	1,99269308362910985036797119708 <b>079</b> e-01
Modulo da diferença $  (a) - (b)  $ :	+0,9914963202880291921e-14
	↑ 30 <sup>a</sup> casa decimal

O erro de arredondamento de máquina ocorre na 13<sup>a</sup> casa decimal para precisão dupla e 30<sup>a</sup> casa decimal para precisão quádrupla. O módulo da diferença entre os resultados é da ordem de  $10^{-14}$ .

O efeito desta precisão é mostrado nas Fig. 4.3 a 4.8 para as variáveis  $(T_C)$ ,  $(T_2)$ ,  $(T_m)$ ,  $(L1)$ ,  $(Q_e)$  e  $(Q_n)$ . Estes gráficos mostram, para as variáveis de interesse, o tamanho da malha  $(h)$  versus o módulo do erro numérico com e sem extrapolação. A precisões utilizadas são dupla (real\*8) e quádrupla (real\*16). São mostrados o erro de discretização da solução numérica sem extrapolação  $(E_h)$  obtido pela Eq. (1.3) e  $(E_{mer})$  que é o erro de discretização obtido com múltiplas extrapolação de Richardson.  $(E_{mer})$  é definido como sendo a diferença

entre a solução analítica ( $\Phi$ ) e a solução numérica obtida pelas múltiplas extrapolação de Richardson ( $\theta_{g,m}$ ) para  $g= 1$  até 12 e  $m= 1$  até 12. Esta equação é uma adaptação da Eq. (1.3).

$$E_{mer} = \Phi - \theta_{g,m} . \quad (4.17)$$

O erro das soluções numéricas ( $E_h$ ) obtidas em (real\*8) para a equação de Laplace bidimensional é da ordem de  $10^{-9}$  a  $10^{-8}$  para o tamanho de malha de aproximadamente  $10^{-4}$ . Observa-se que os erros de arredondamento não interferem nestes resultados e este erro decai monotonicamente quando  $h \rightarrow 0$ .

O erro das soluções numéricas extrapoladas ( $E_{mer}$ ) obtida em precisão dupla é menor do que ( $E_h$ ) para mesma precisão. O erro de ( $E_{mer}$ ) é da ordem de  $10^{-14}$  a  $10^{-13}$  para um tamanho de malha de aproximadamente  $10^{-2}$ . A redução do erro de discretização ( $RED$ ) em relação ao melhor resultado de ( $E_h$ ) e ( $E_{mer}$ ), para todas as variáveis de interesse, é da ordem de 100.000 vezes. Para a obtenção de  $RED$  utiliza-se a Eq. (4.18)

$$RED = \frac{E_h}{E_{mer}} \quad (4.18)$$

Outra característica observado para todas as variáveis de interesse é que o módulo do erro de discretização muda de tendência em um determinado ponto do gráfico.  $E_{mer}$  não decai monotonicamente para todo  $h \rightarrow 0$ . Este efeito é devido a contaminação das soluções numéricas extrapoladas por erros de arredondamento. É observado que este efeito é mais significativo quanto menor for a precisão numérica.

O erro das soluções numéricas extrapoladas ( $E_{mer}$ ) obtida em precisão quádrupla é menor do que ( $E_h$ ) para precisão quádrupla e ( $E_{mer}$ ) obtidos em precisão dupla. O menor erro obtido para  $E_{mer}$  em (real\*16) é da ordem de  $10^{-32}$  a  $10^{-28}$  para um tamanho de malha de aproximadamente  $10^{-3}$ . A redução do erro de discretização ( $RED$ ) em relação ao melhor resultado de ( $E_{mer}$ ) em precisão dupla e ( $E_{mer}$ ) em precisão quádrupla, para todas as variáveis de interesse, é da ordem de  $1 \times 10^{20}$  vezes. Para a obtenção de  $RED$  utiliza-se a Eq. (4.19)

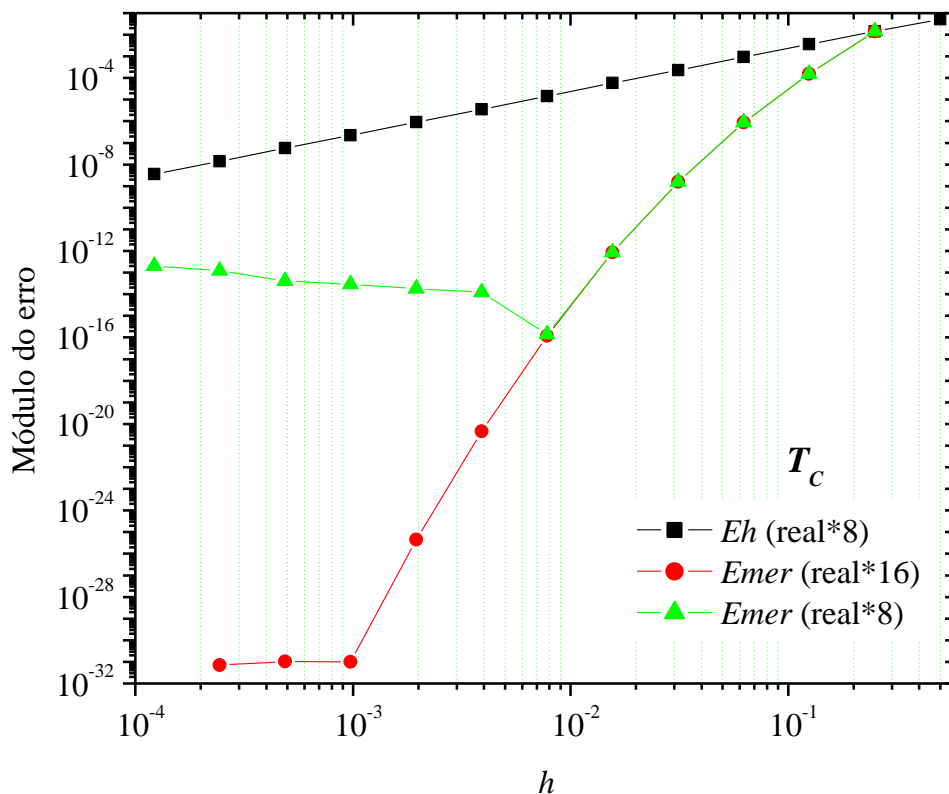
$$RED = \frac{E_{mer(real*8)}}{E_{mer(real*16)}}. \quad (4.19)$$

Nas Fig. 4.3 a 4.8 são mostrados, em diversas malhas( $g$ ), ( $E_h$ ) obtido pelas Eqs. (1.3), (4.9) e (4.15) e ( $E_{mer}$ ) obtido pelas Eqs. (3.18), (4.9) e (4.17) respectivamente.

O erro de discretização sem extrapolação ( $E_h$ ) é representado por quadrados sólidos e cada um destes quadrados definem um tamanho ( $h$ ) de malha diferente denominado de ( $g$ ). Estas malhas ( $g$ ) variam de 0 até 12.

O erro de discretização com MER ( $E_{mer}$ ) calculado em precisão dupla é representado por triângulos sólidos e cada um destes triângulos definem um nível de extrapolação ( $m$ ). Estes níveis de extrapolação ( $m$ ) variam de 0 até 12.

O erro de discretização com MER ( $E_{mer}$ ) calculado em precisão quádrupla é representado por círculos sólidos e cada um destes círculos definem um nível de extrapolação ( $m$ ). Estes níveis de extrapolação ( $m$ ) variam de 0 até 10.



**Figura 4.3 - Comparativo entre o módulo do erro em precisão dupla e quádrupla para a variáveis ( $T_c$ ) versus tamanho da malha ( $h$ ).**

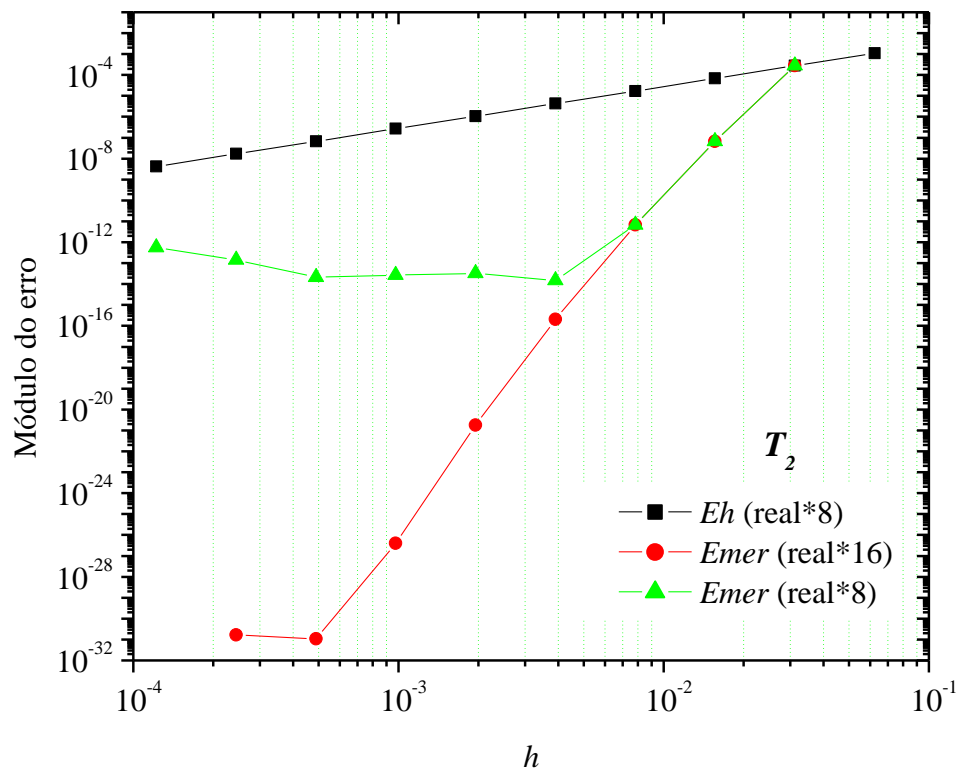


Figura 4.4 - Comparativo entre o módulo do erro em precisão dupla e quádrupla para a variáveis ( $T_2$ ) versus tamanho da malha ( $h$ ) .

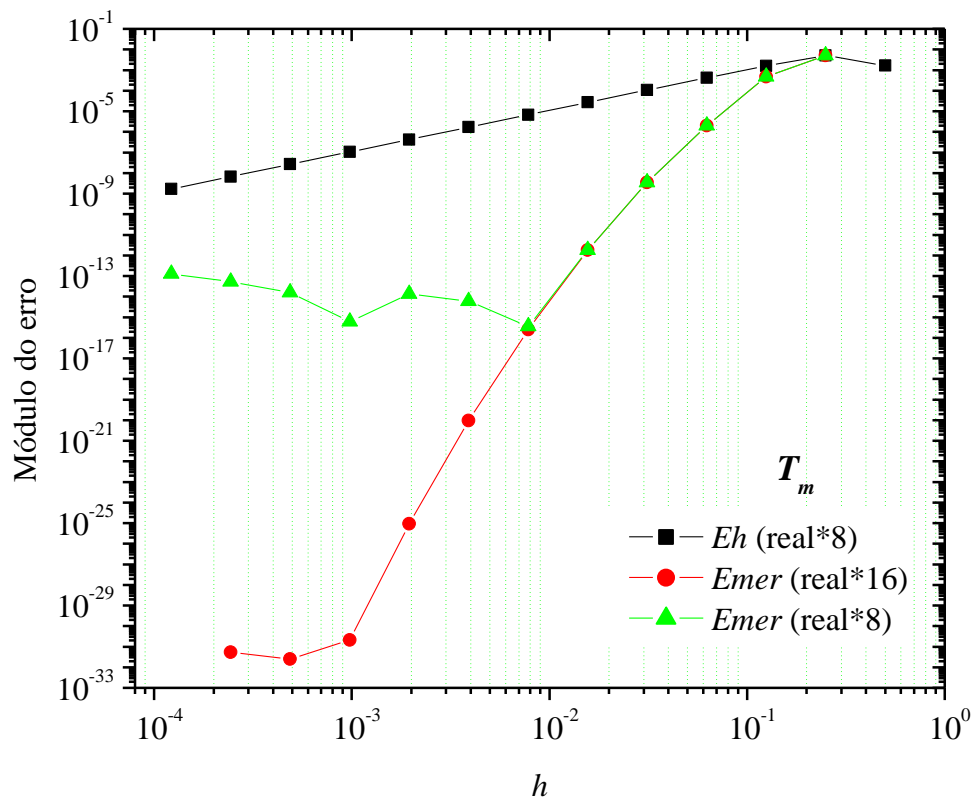


Figura 4.5 - Comparativo entre o módulo do erro em precisão dupla e quádrupla para a variáveis ( $T_m$ ) versus tamanho da malha ( $h$ ) .

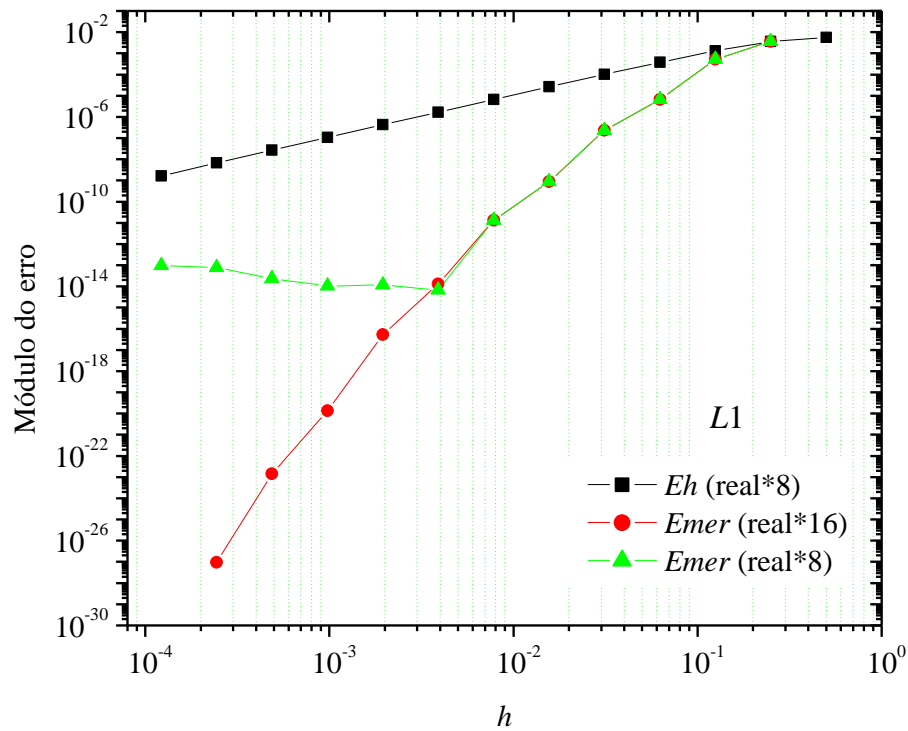


Figura 4.6 - Comparativo entre o módulo do erro em precisão dupla e quádrupla para a variáveis ( $L1$ ) versus tamanho da malha ( $h$ ) .

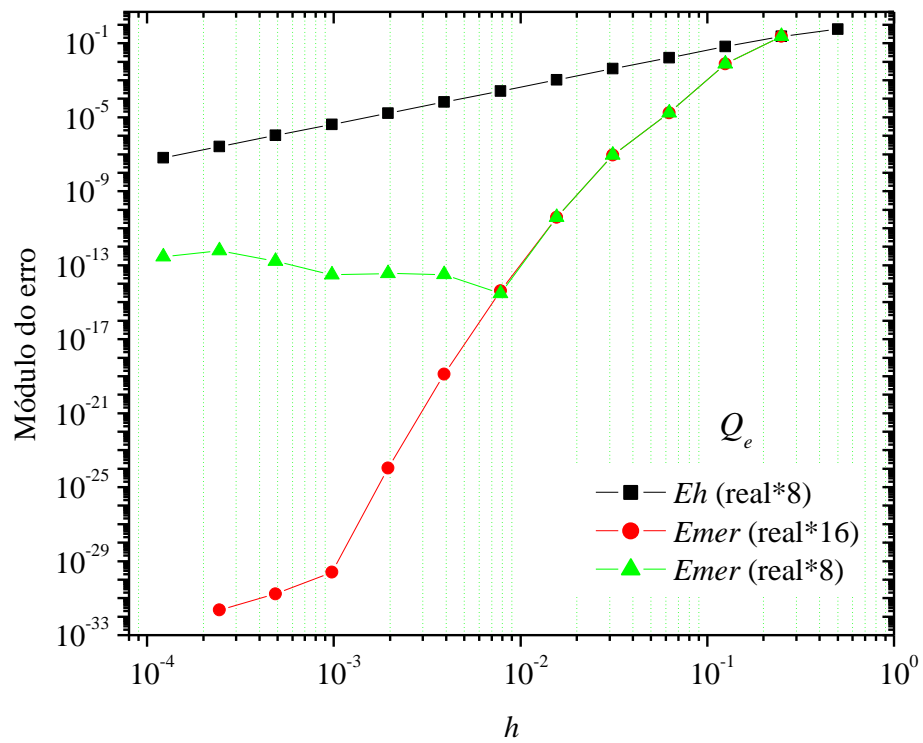
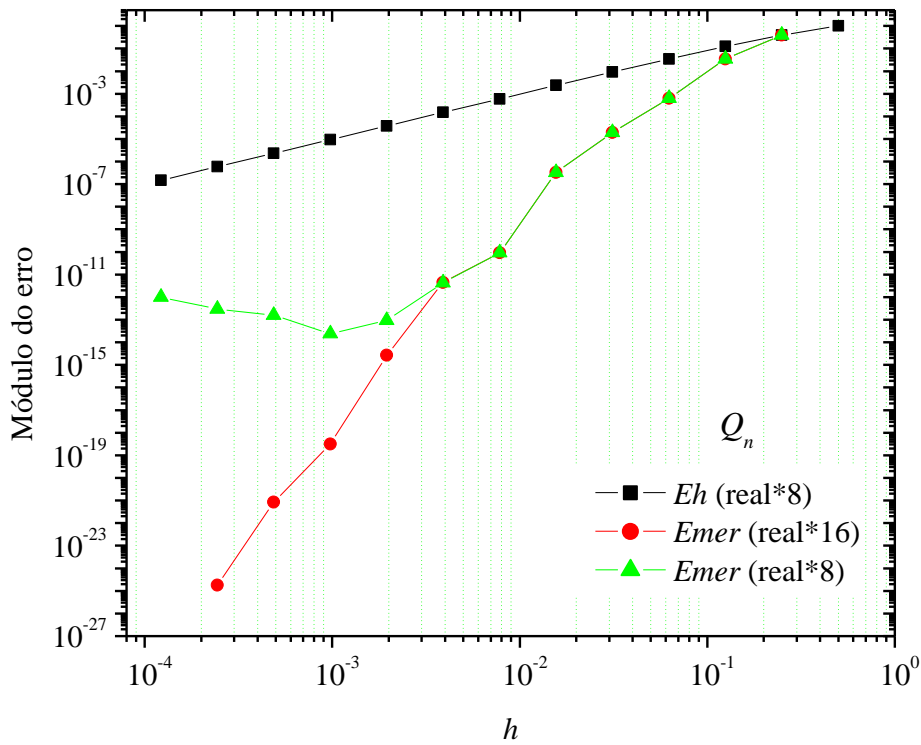


Figura 4.7 - Comparativo entre o módulo do erro em precisão dupla e quádrupla para a variáveis ( $Q_e$ ) versus tamanho da malha ( $h$ ) .



**Figura 4.8 - Comparativo entre o módulo do erro em precisão dupla e quádrupla para a variáveis ( $Q_n$ ) versus tamanho da malha ( $h$ ).**

#### 4.3.2 Estimativa do erro de discretização

As Figs. 4.9 até 4.14 mostram o módulo do erro numérico com ou sem extrapolação em função de ( $h$ ) em precisão dupla (real\*8) para as variáveis de interesse. É mostrado para todas as variáveis de interesse ( $U_h$ ) que é a estimativa do erro numérico definido pela Eq. (2.39) e ( $U_{mer}$ ) que é a estimativa do erro de ( $E_{mer}$ ) definido pela Eq. (3.18). É também introduzido o estimador de erro  $d\phi$  sendo calculado pela Eq. (4.20) e válida para  $g = [1,12]$  e  $m=[0, 11]$ .

$$d\phi = \phi_{g,m} - \phi_{g-1,m}. \quad (4.20)$$

Este estimador é confiável para a estimativa do erro de discretização das soluções numéricas obtidas com múltiplas extrapolações de Richardson (MER), porém é inacurado.

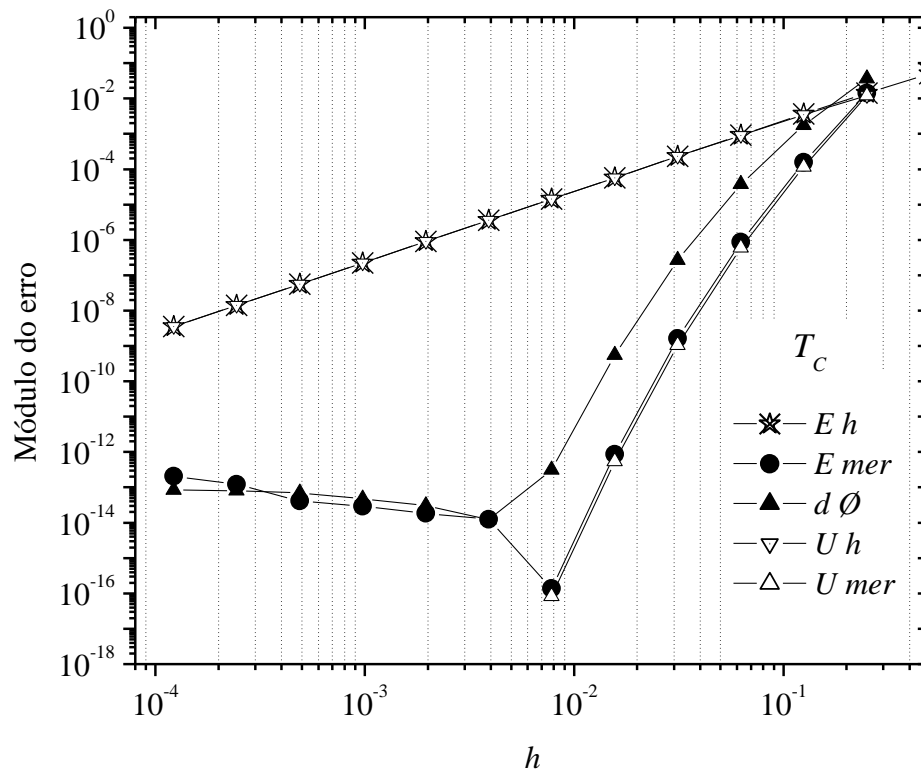


Figura 4.9 - Módulo do erro da solução numérica das variáveis ( $T_C$ ) versus tamanho da malha  $h$  em precisão dupla.

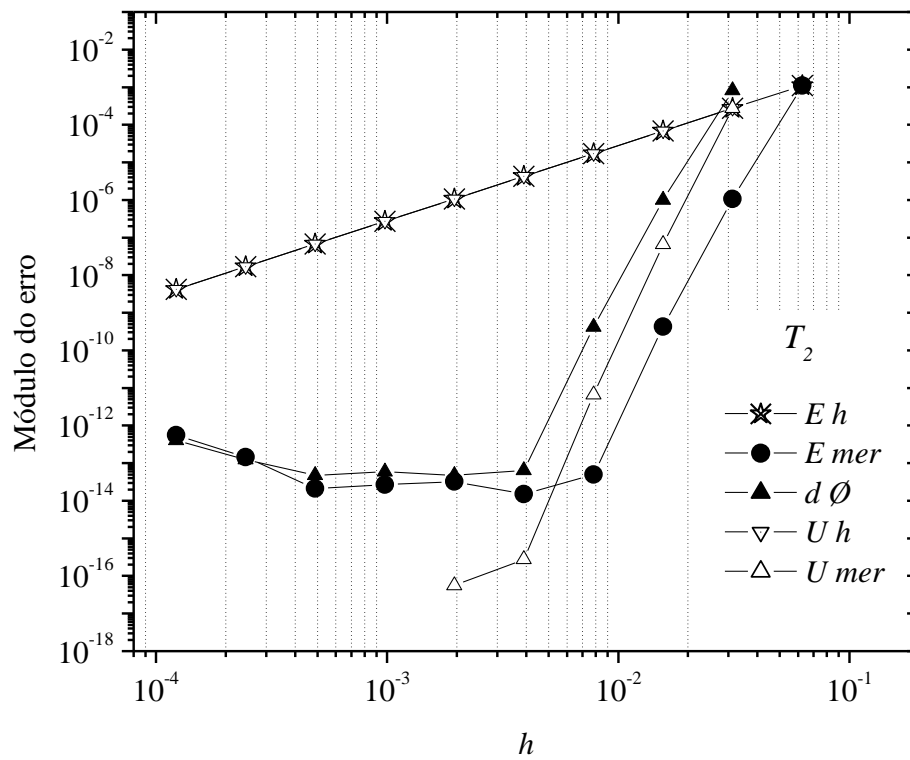


Figura 4.10 - Módulo do erro da solução numérica das variáveis ( $T_2$ ) versus tamanho da malha  $h$  em precisão dupla.



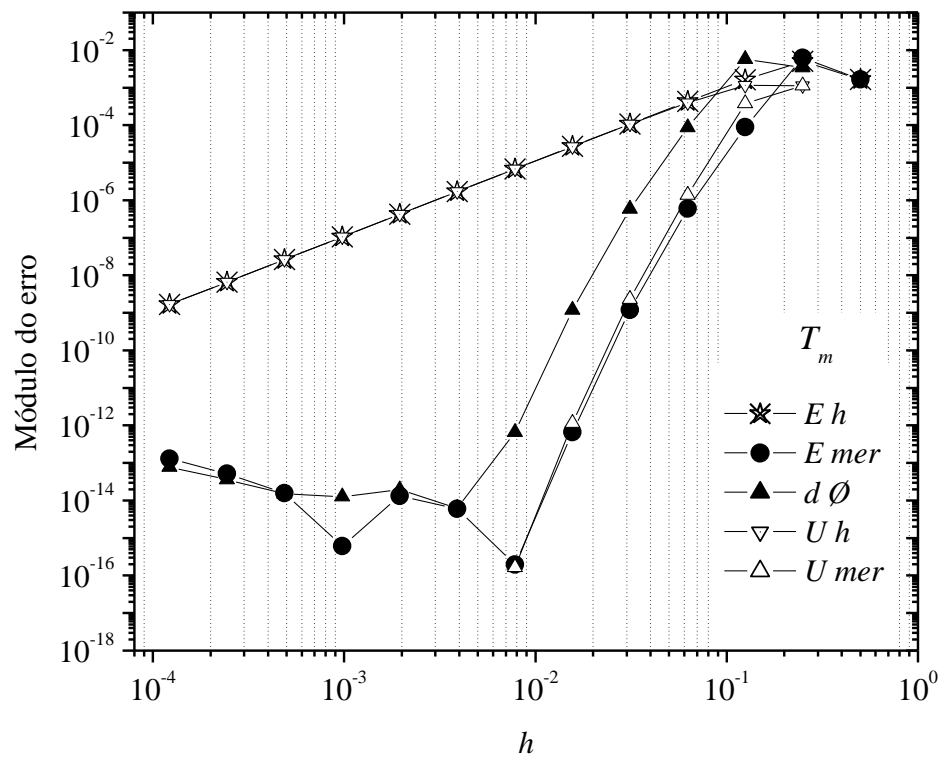


Figura 4.11 - Módulo do erro da solução numérica das variáveis ( $T_m$ ) versus tamanho da malha  $h$  em precisão dupla.

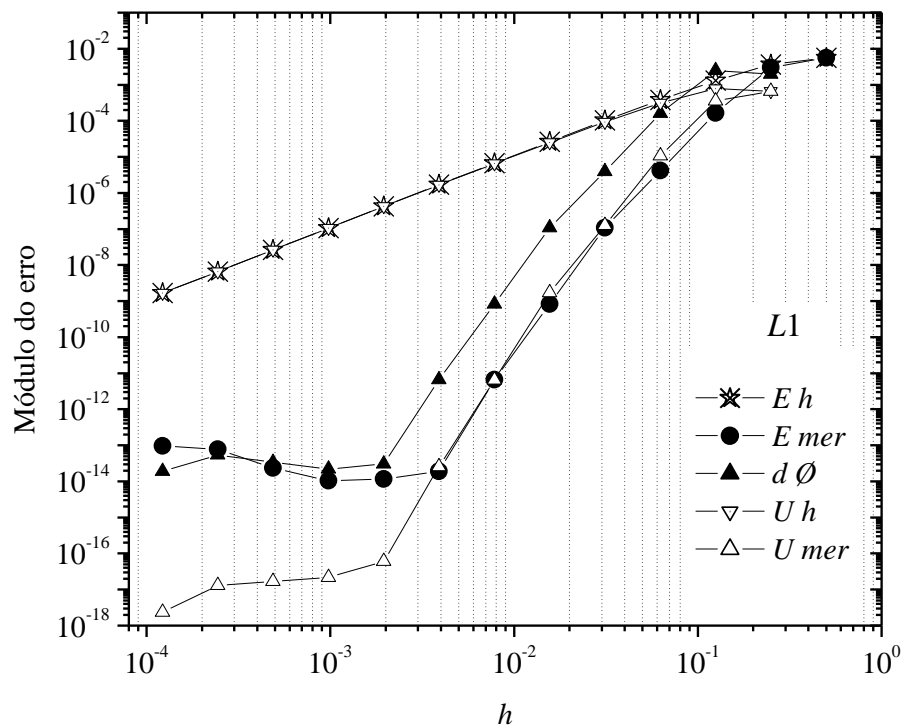


Figura 4.12 - Módulo do erro da solução numérica das variáveis ( $L1$ ) versus tamanho da malha  $h$  em precisão dupla.

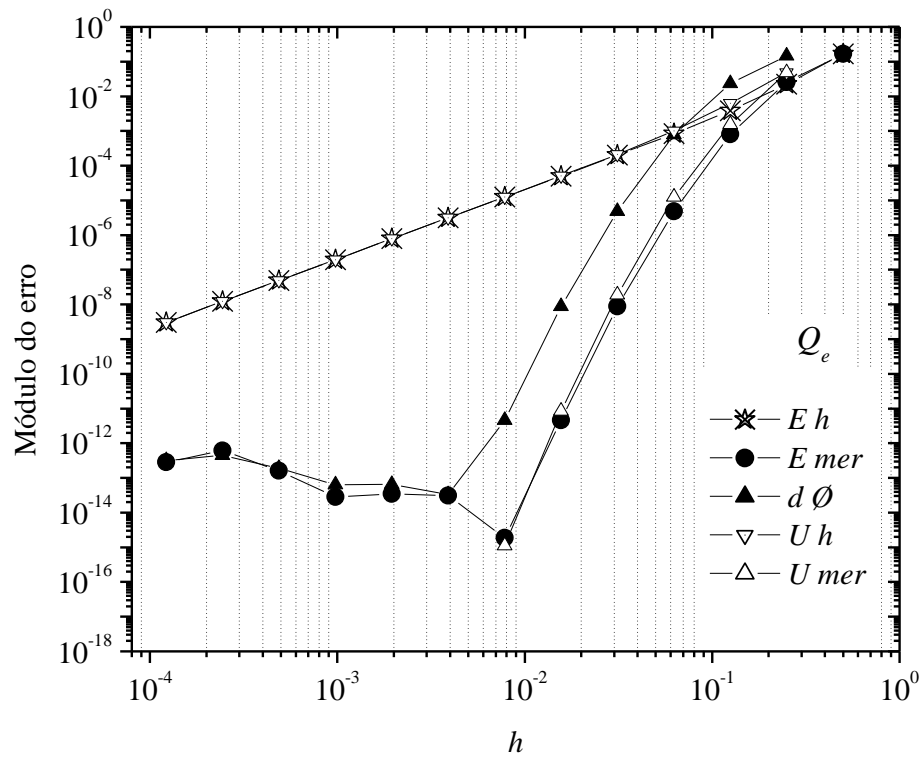


Figura 4.13 - Módulo do erro da solução numérica das variáveis ( $Q_e$ ) versus tamanho da malha  $h$  em precisão dupla.

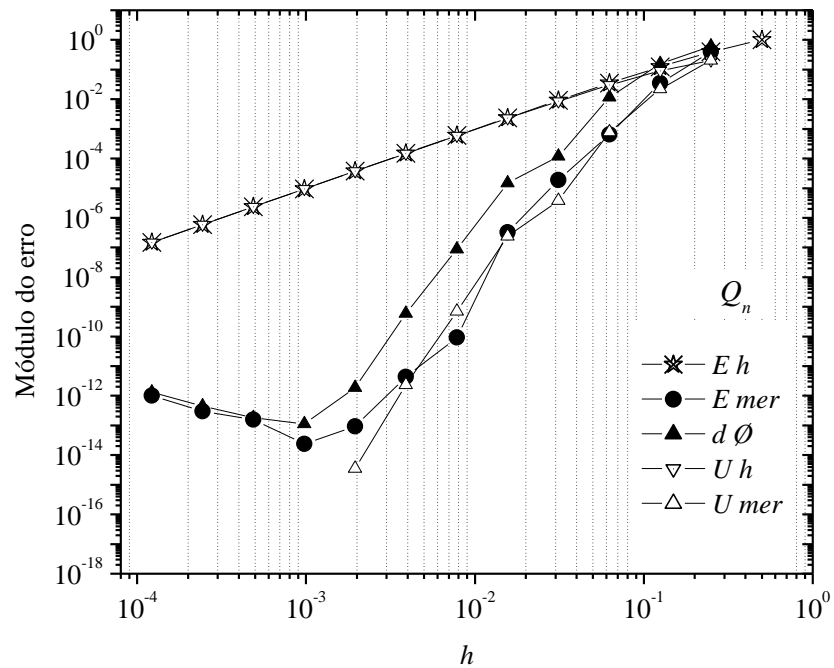


Figura 4.14 - Módulo do erro da solução numérica das variáveis ( $Q_n$ ) versus tamanho da malha  $h$  em precisão dupla.

Para todas as variáveis de interesse mostradas nas Figs. 4.9 a 4.14 observou os seguintes comportamentos:

- $(E_h)$  e  $(U_h)$  – a estimativa do erro de discretização  $(U_h)$  coincide visualmente com o erro de discretização  $(E_h)$  em qualquer  $(h)$ .
- $(E_{mer})$  e  $(U_{mer})$  – a estimativa do erro de MER  $(U_{mer})$  é levemente inferior a  $(E_{mer})$  em qualquer  $(h)$ . Para a variável  $(T_2)$  o estimador  $(U_{mer})$  apresentou ser inacurado a  $(E_{mer})$ . Entretanto, para as outras variáveis de interesse o estimador  $(U_{mer})$  demonstra ser confiável devido  $(U_{mer} > E_{mer})$  e acurado devido a  $(U_{mer} \cong E_{mer})$ .
- $(d\phi)$  - apresentou ser um estimador confiável e inacurado.
- $(E_\pi)$  - os erros de arredondamento também afetam os estimadores  $(U_{mer})$  e  $(d\phi)$ . Em alguns casos, o erro de arredondamento afeta os resultados de  $(U_{mer})$  e  $(d\phi)$  em malhas posteriores do que os resultados de  $(E_{mer})$ . Entretanto, a principal função dos estimadores de erro  $(U_{mer})$  e  $(d\phi)$ , mesmo que sejam inacurados, é detectar os erros de arredondamento  $(E_\pi)$  em situações onde não há solução analítica do problema. É uma forma de controlar os cancelamentos subtrativos existentes nos resultados das soluções numéricas extrapoladas.

Outro aspecto importante que pode ser observado para MER é a redução do custo computacional para as variáveis de interesse. É mostrada na Tab. 4.5 a redução do custo computacional para a variável  $(T_C)$ . Para esta análise é então fixada a ordem do erro numérico em  $10^{-9}$ . Para atingir esta ordem de erro por meio de solução numérica sem extrapolação é necessária uma malha de  $4097 \times 4097$  que corresponde a um tempo de processamento de 7134s ou 1h58min6s.

Entretanto, para atingir a mesma ordem de erro numérico por meio de solução numérica extrapolada foram necessárias 5 malhas:  $3 \times 3$ ,  $5 \times 5$ ,  $9 \times 9$ ,  $17 \times 17$ ,  $33 \times 33$  e MER. Isto correspondeu a gastar um tempo de *CPU* de 0,45 s. Comparativamente, o tempo percentual com e sem MER é da ordem de  $10^{-5} \%$ , isto é, insignificante comparado com a necessidade de tempo para a solução sem MER.

Fica evidenciado que o uso de MER reduz o tempo de processamento mesmo que haja tempos improdutivos de entrada de dados. Para o caso sem MER, a memória RAM foi extremamente exigida devido a trabalhar com os cálculos em uma malha  $4097 \times 4907$ .

Tabela 4.5 – Análise do Custo Computacional para a variável ( $T_C$ ).

Método	Ordem do erro numérico	Malha	Tempo de CPU (s)
Sem MER	$10^{-9}$	4097x4097	7134
Com MER	$10^{-9}$	3x3 5x5 9x9 17x17 33x33 MER	0,45 (soma dos tempos parciais sem entradas de dados)

As Figs. 4.15 a 4.20 mostram o módulo do erro numérico com ou sem extrapolação em função de ( $h$ ) em precisão quádrupla (real\*16) para as variáveis de interesse. É mostrado para todas as variáveis de interesse ( $U_h$ ) que é a estimativa do erro numérico definido pela Eq. (2.39) e ( $U_{mer}$ ) que é a estimativa do erro de ( $E_{mer}$ ) definido pela Eq. (3.18). E o estimador de erro  $d\phi$  sendo calculado pela Eq. (4.20).

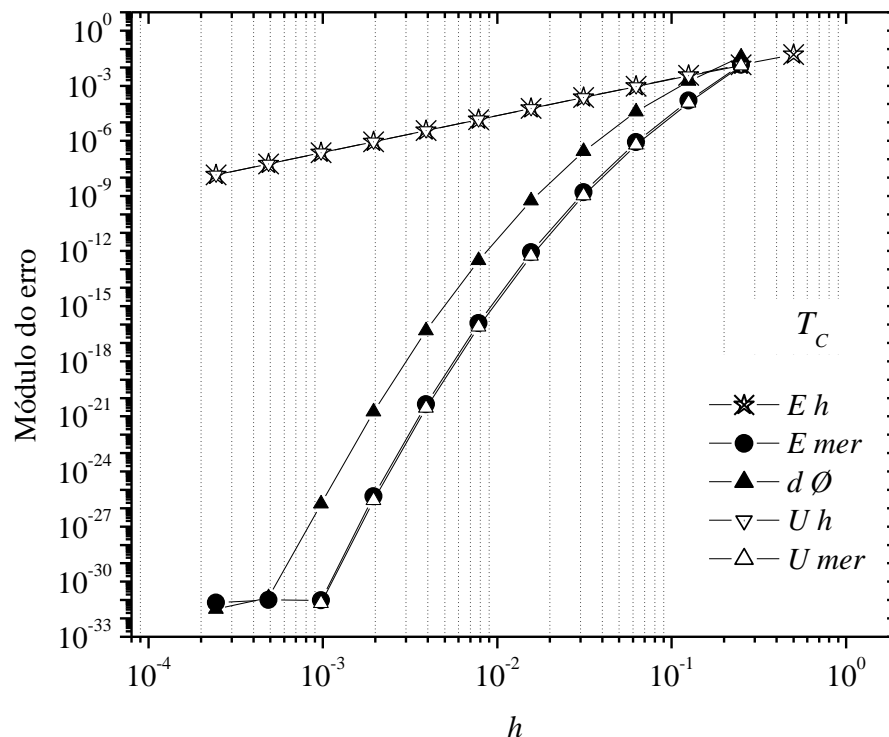


Figura 4.15 - Módulo do erro da solução numérica das variáveis ( $T_C$ ) versus tamanho da malha  $h$  em precisão quádrupla.

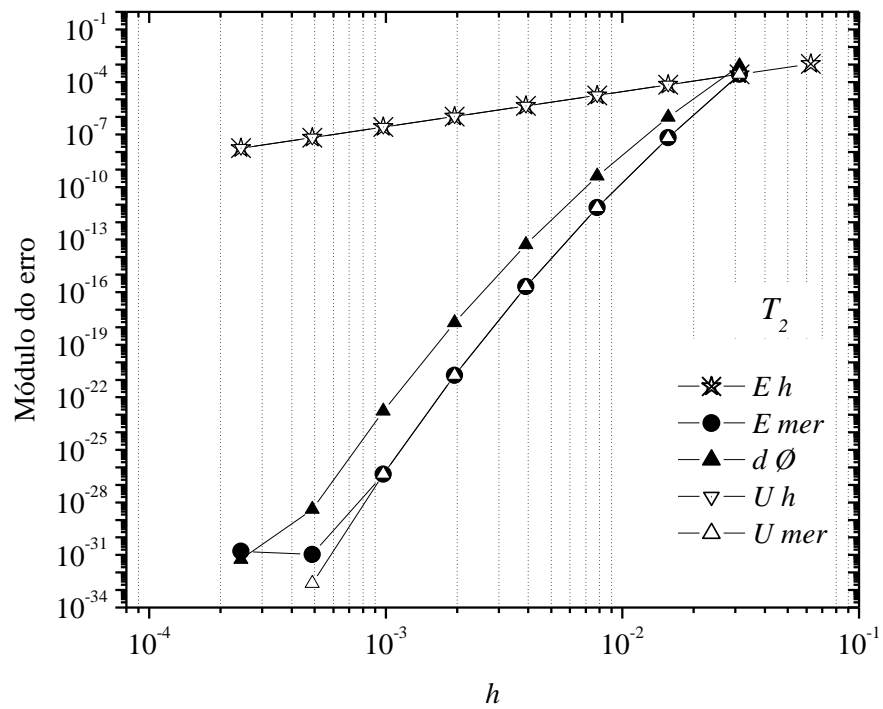


Figura 4.16 - Módulo do erro da solução numérica das variáveis  $(T_2)$  versus tamanho da malha  $h$  em precisão quádrupla.

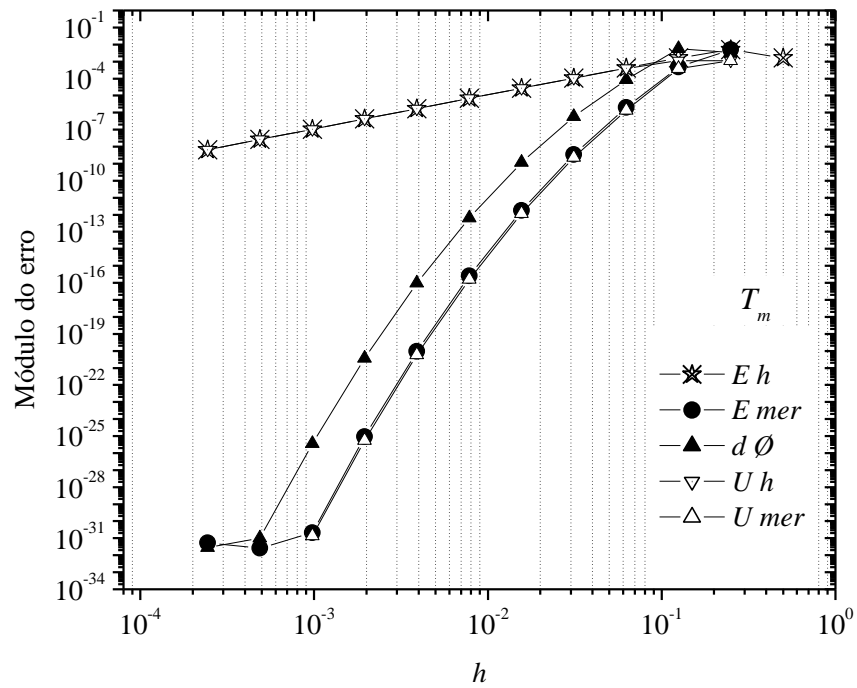


Figura 4.17 - Módulo do erro da solução numérica das variáveis  $(T_m)$  versus tamanho da malha  $h$  em precisão quádrupla.

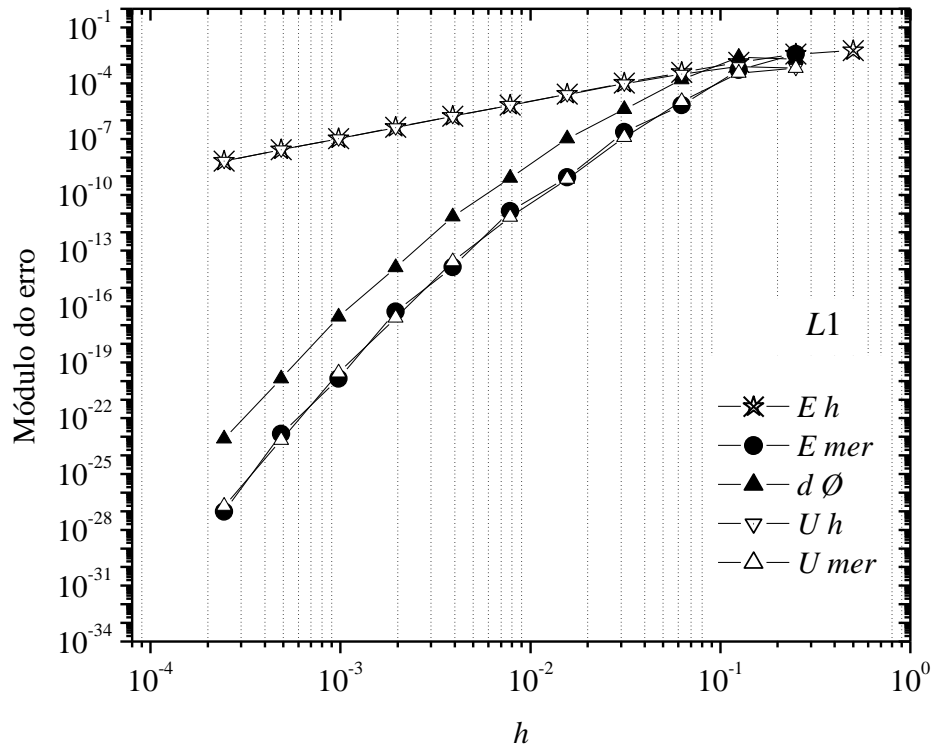


Figura 4.18 - Módulo do erro da solução numérica das variáveis ( $L_1$ ) versus tamanho da malha  $h$  em precisão quádrupla.

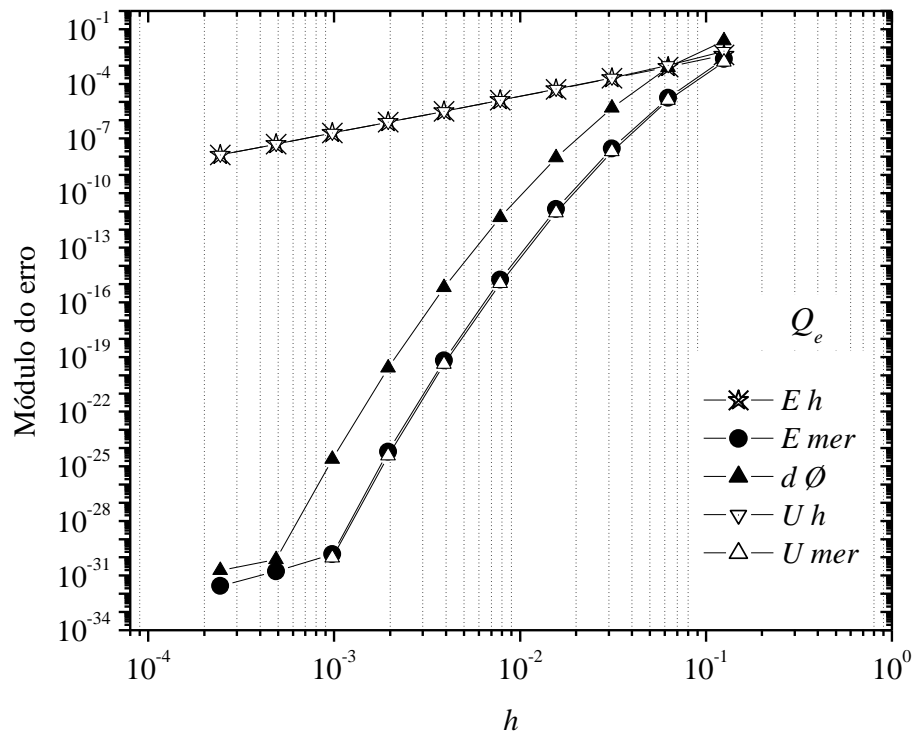
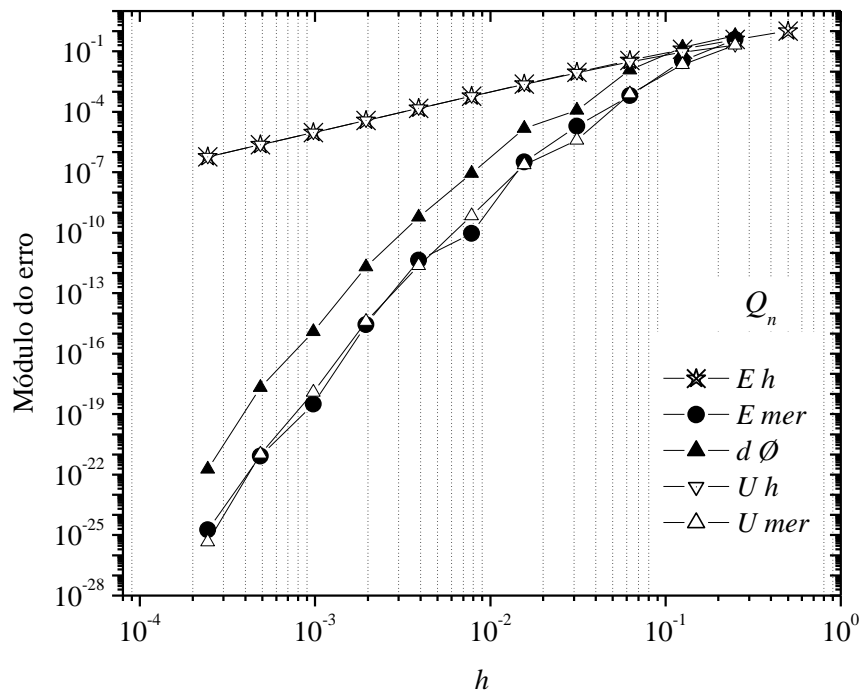


Figura 4.19 - Módulo do erro da solução numérica das variáveis ( $Q_e$ ) versus tamanho da malha  $h$  em precisão quádrupla.



**Figura 4.20 - Módulo do erro da solução numérica das variáveis ( $Q_n$ ) versus tamanho da malha  $h$  em precisão quádrupla.**

Para todas as variáveis de interesse mostradas nas Figs. 4.15 a 4.20 observou os seguintes comportamentos:

- $(E_h)$  e  $(U_h)$  – a estimativa do erro de discretização  $(U_h)$  coincide visualmente com o erro de discretização  $(E_h)$  em qualquer  $(h)$ .
- $(E_{mer})$  e  $(U_{mer})$  – a estimativa do erro de MER  $(U_{mer})$  coincide visualmente com o  $(E_{mer})$  em qualquer  $(h)$ .
- $(d\phi)$  - apresentou ser um estimador confiável e inacurado em qualquer  $(h)$
- $(E_\pi)$  - os erros de arredondamento também afetam menos estimadores  $(U_{mer})$  e  $(d\phi)$  em comparação com os resultados obtidos em precisão dupla.

O erro das soluções numéricas  $(E_{mer})$ , mostrados nas Figs. 4.3 a 4.20, foram calculadas para cada variável de interesse pela Eq. (3.18) para  $g = m$  e Eqs. (4.9) e (4.17) .

As Figs. 4.21 a 4.26 mostram o erro das múltiplas extrapolações de Richardson  $(E_{mer})$  para cada nível de extrapolação  $(m)$  função de  $(h)$  em precisão quádrupla (real\*16) para as variáveis de interesse obtido pelas Eqs. (3.18), (4.9) e (4.17). As figura apresentam resultados para as malhas  $g = [0, \text{máx}:12]$  e  $m=[0, \text{máx}:12]$ . É observado em todas estas figuras que quanto maior o nível de extrapolação  $(m)$ , maior a eficiência de MER em reduzir o erro de

discretização. Além disso, para um mesmo tamanho de malha ( $h$ ) é possível observar que há diversas ordens do erro, na qual confirmam a existência dos expoentes da Eq. (1.4).

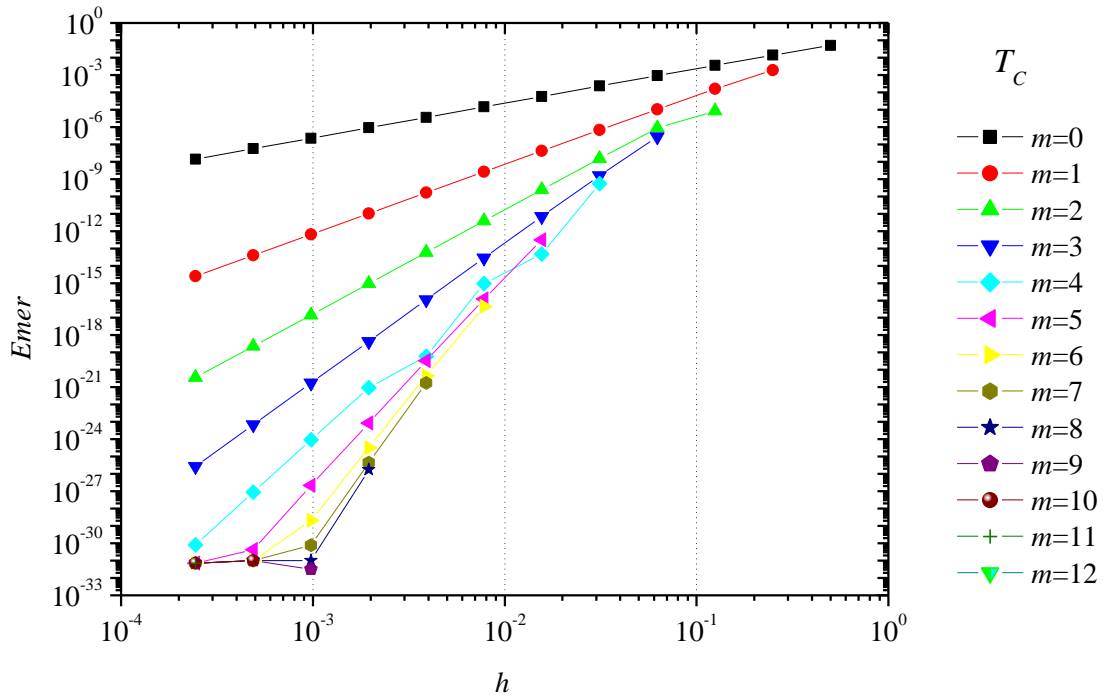


Figura 4.21 - Erro ( $E$ ) das variáveis ( $T_C$ ) versus tamanho da malha ( $h$ ) e número de extrapolações ( $m$ ) em precisão quádrupla.

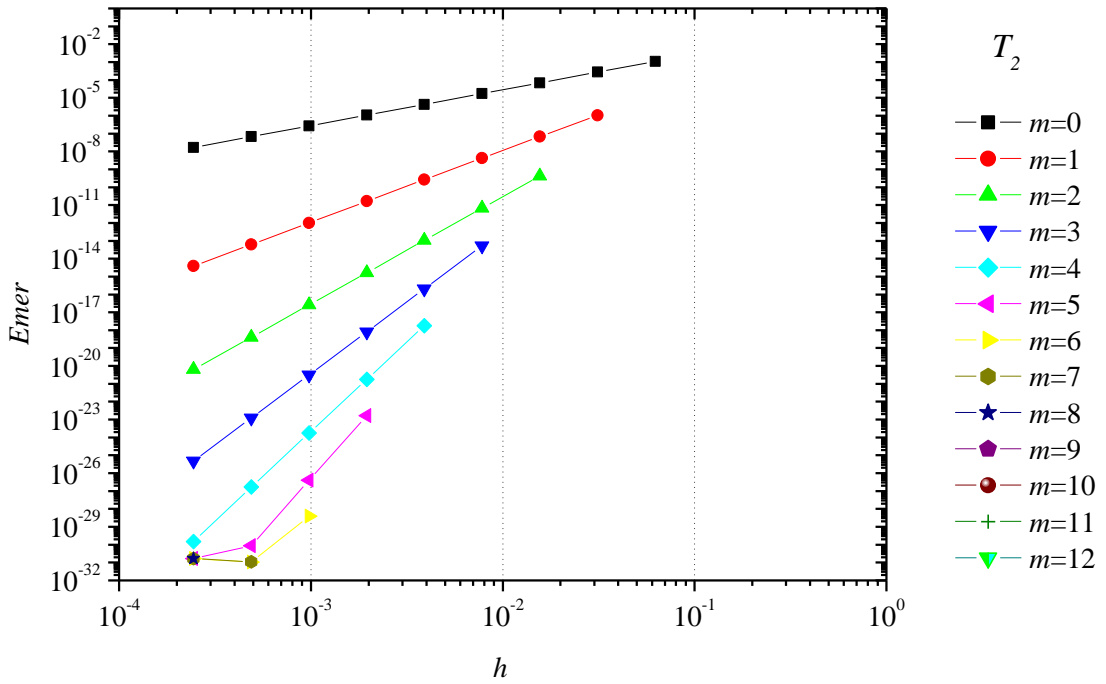


Figura 4.22 - Erro ( $E$ ) das variáveis ( $T_2$ ) versus tamanho da malha ( $h$ ) e número de extrapolações ( $m$ ) em precisão quádrupla.



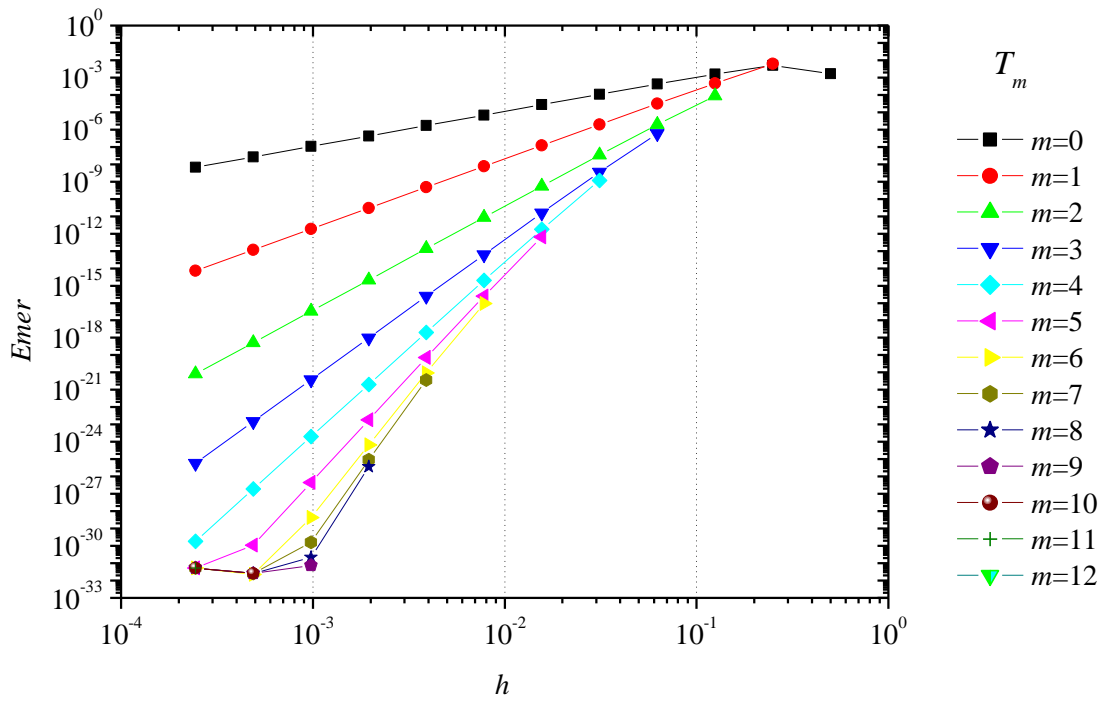


Figura 4.23- Erro ( $E$ ) das variáveis ( $T_m$ ) versus tamanho da malha ( $h$ ) e número de extrapolações ( $m$ ) em precisão quádrupla.

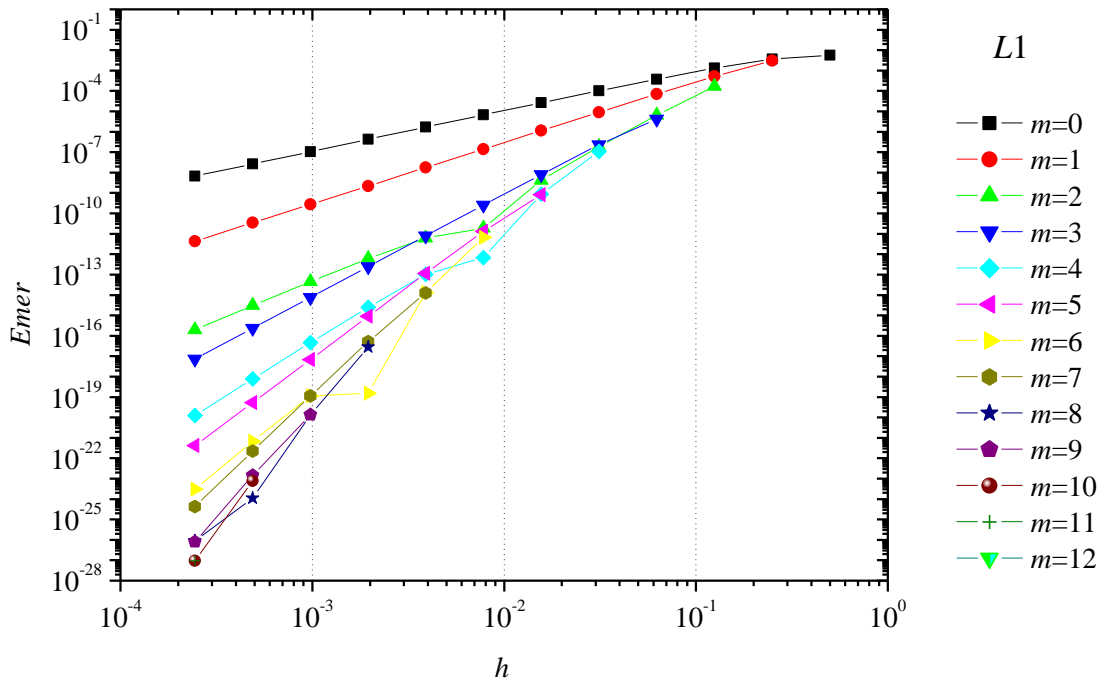


Figura 4.24- Erro ( $E$ ) das variáveis ( $L1$ ) versus tamanho da malha ( $h$ ) e número de extrapolações ( $m$ ) em precisão quádrupla.

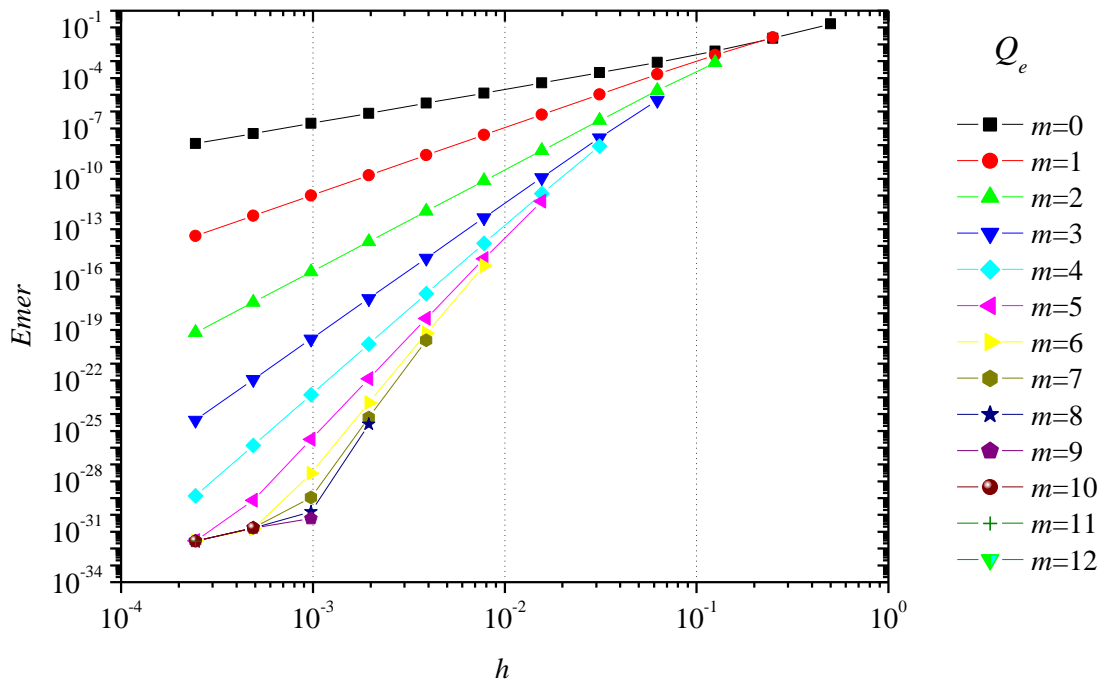


Figura 4.25- Erro ( $E$ ) das variáveis ( $Q_e$ ) versus tamanho da malha ( $h$ ) e número de extrapolações ( $m$ ) em precisão quádrupla.

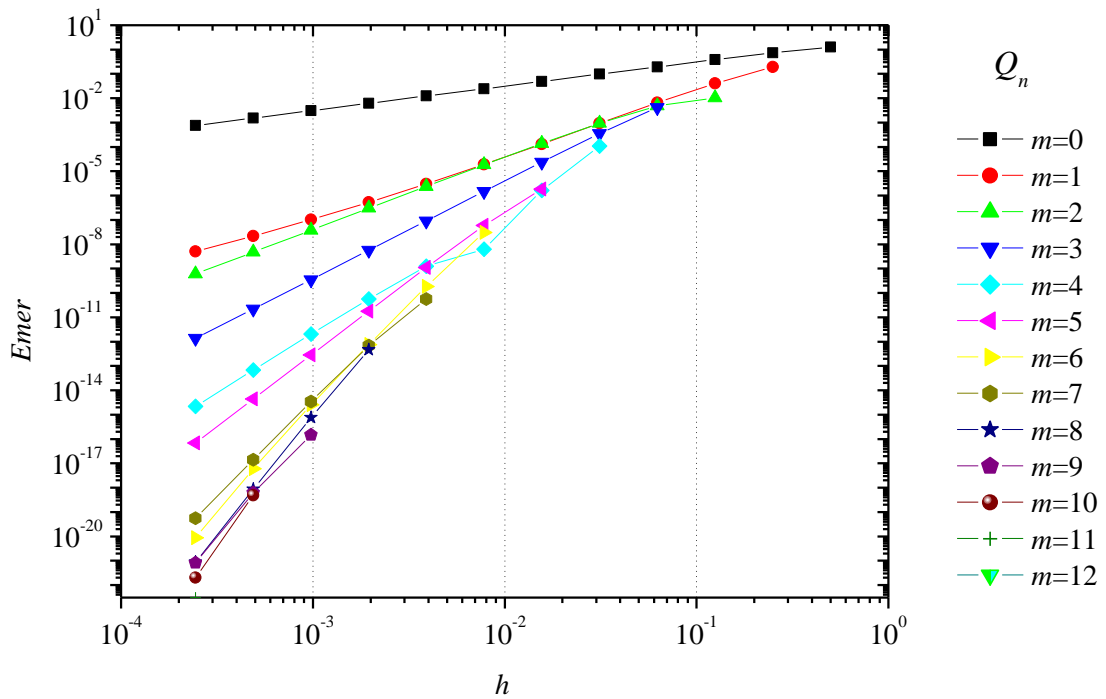


Figura 4.26- Erro ( $E$ ) das variáveis ( $Q_n$ ) versus tamanho da malha ( $h$ ) e número de extrapolações ( $m$ ) em precisão quádrupla.

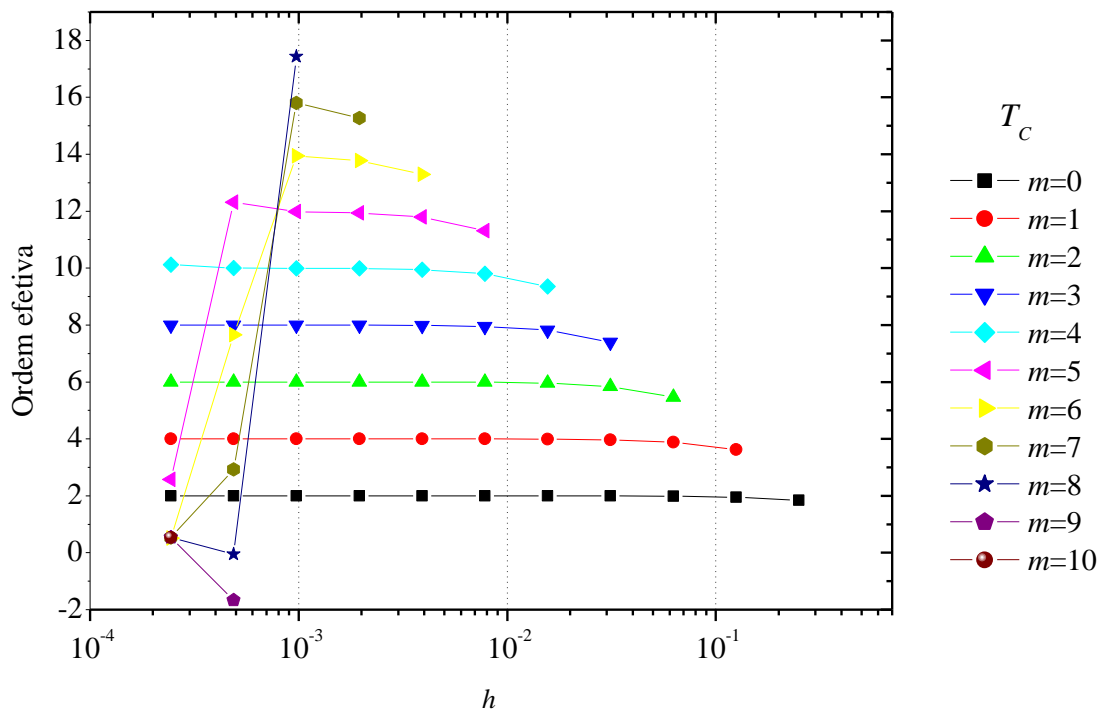
### 4.3.3 Verificação das ordens do erro

A Fig. 4.27 mostra as ordens efetivas ( $p_E$ ) para a variável ( $T_c$ ) em função do tamanho da malha ( $h$ ) calculada a partir da Eq. (3.9). À medida que  $h \rightarrow 0$ , as ordens efetivas tendem às ordens verdadeiras. Isto ocorre até o ponto em que as extrapolações são comprometidas pelo erro de máquina. Foram utilizadas precisões quádruplas nos cálculos.

As ordens verdadeiras observadas no gráfico são:

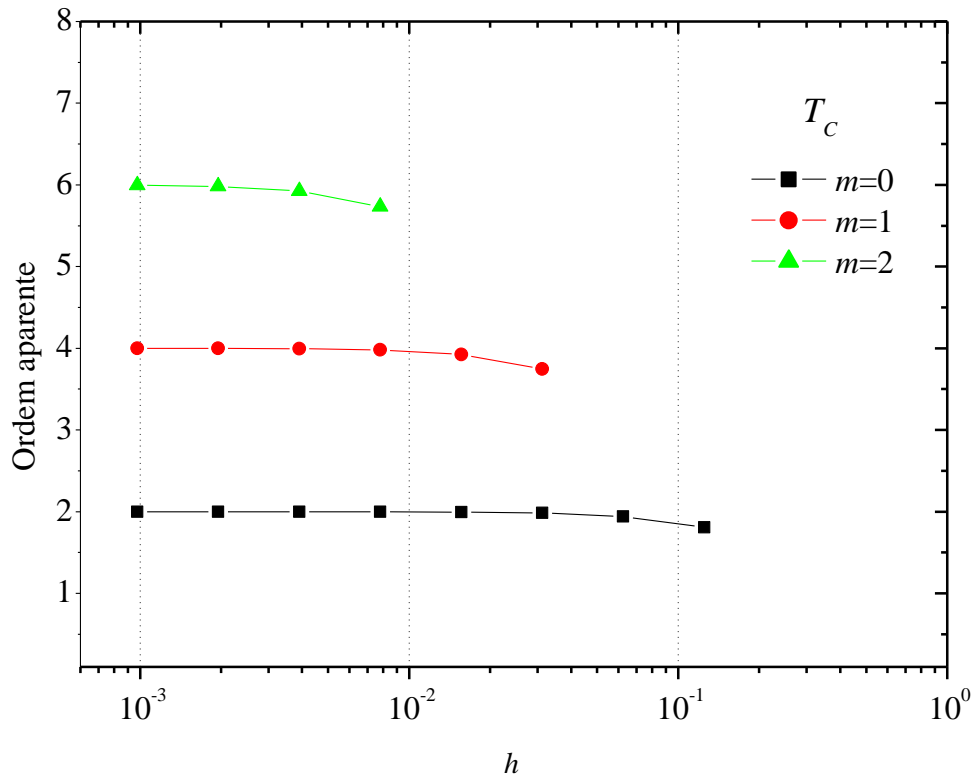
- ( $p_0 = 2$ );
- ( $p_1 = 4$ );
- ( $p_2 = 6$ );
- ( $p_3 = 8$ );
- ( $p_4 = 10$ );
- ( $p_5 = 12$ );
- ( $p_6 = 14$ ); e
- ( $p_7 = 16$ ).

É confirmado *a posteriori* que as ordens verdadeiras definidas *a priori* formando uma progressão aritmética conforme Eq.(3.2).



**Figura 4.27 - Ordem efetiva ( $p_E$ ) para ( $T_c$ ) versus o tamanho da Malha ( $h$ ) e número de extrapolações ( $m$ ).**

As Figs. 4.28 a 4.33 mostram, em função de  $(h)$ , as ordem aparentes  $(p_u)_{g,m}$  sendo esta calculado por meio da Eq. (3.16) para  $g = [2, G]$ ,  $m = [1, g-2]$ . Para as variáveis de interesse são confirmadas a *posteriori* as ordens dos erros obtidas *a priori*. Teoricamente, quando a malha é refinada, a ordem aparente  $(p_u)$  tende à ordem verdadeira  $(p_m)$ . Este efeito é claramente verificado nos gráficos das Figs. 4.28 a 4.33 onde à medida que  $h \rightarrow 0$  a ordem aparente tende à ordem verdadeira.



**Figura 4.28 - Ordem aparente  $(p_u)$  versus o tamanho da malha  $(h)$  e número de extrapolações  $(m)$  para a variável  $(T_C)$ .**

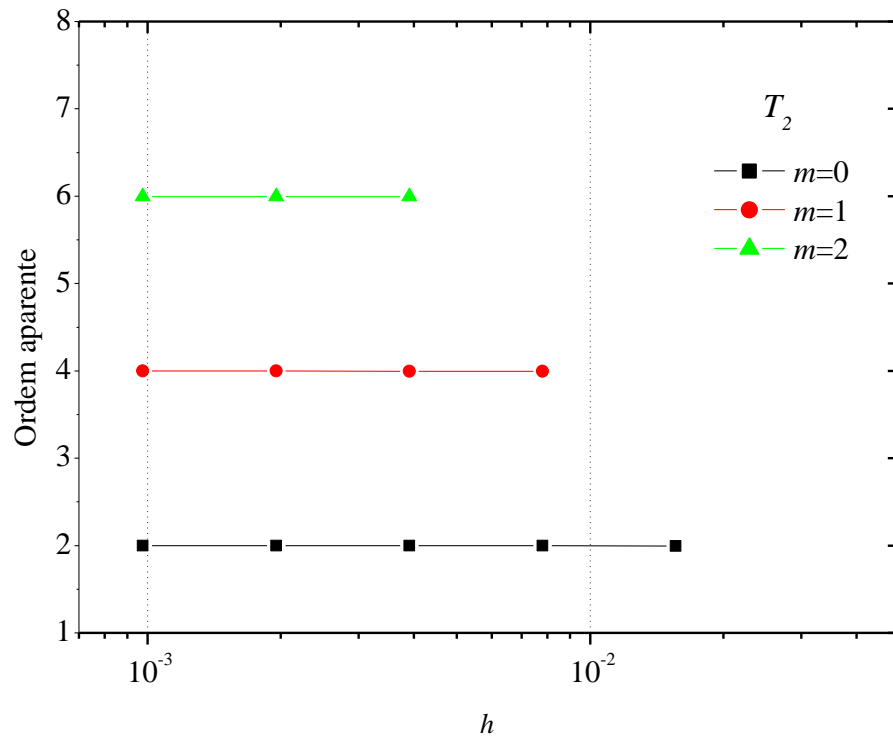


Figura 4.29 - Ordem aparente ( $p_u$ ) versus o tamanho da malha ( $h$ ) e número de extrapolações ( $m$ ) para a variável ( $T_2$ ).

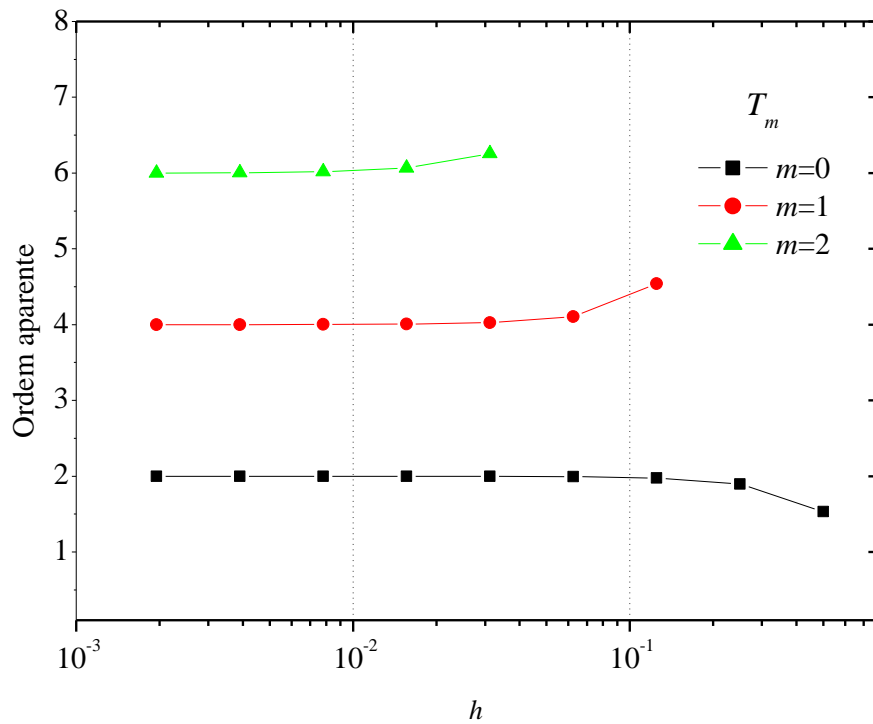


Figura 4.30 - Ordem aparente ( $p_u$ ) versus o tamanho da malha ( $h$ ) e número de extrapolações ( $m$ ) para a variável ( $T_m$ ).

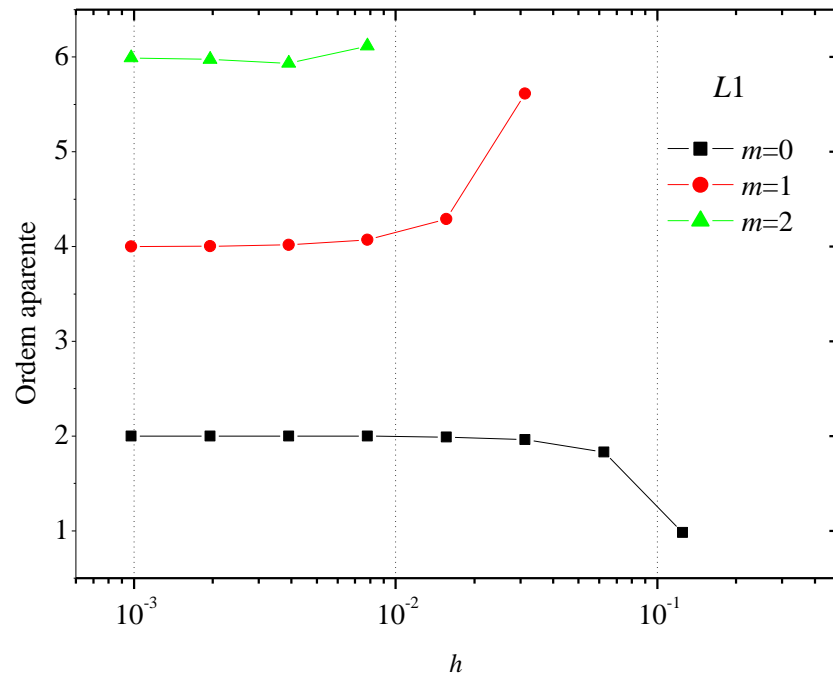


Figura 4.31 - Ordem aparente ( $p_u$ ) versus o tamanho da malha ( $h$ ) e número de extrapolações ( $m$ ) para a variável ( $L$ ).

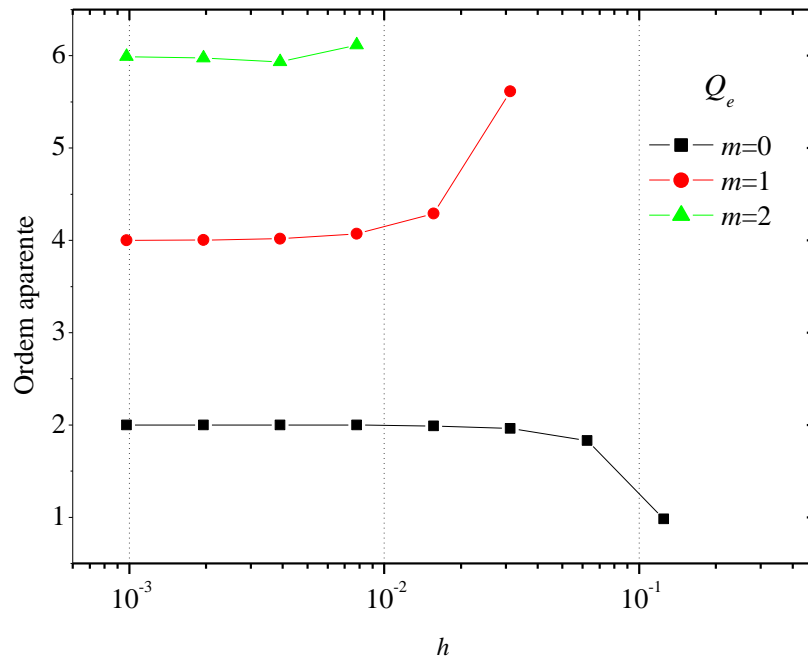
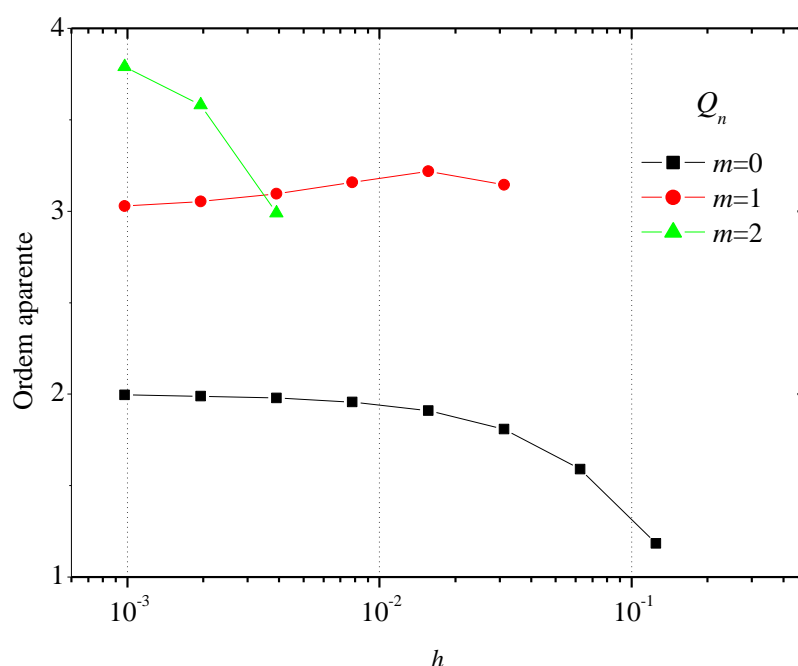


Figura 4.32 - Ordem aparente ( $p_u$ ) versus o tamanho da malha ( $h$ ) e número de extrapolações ( $m$ ) para a variável ( $Q_e$ ).



**Figura 4.33 - Ordem aparente ( $p_u$ ) versus o tamanho da malha ( $h$ ) e número de extrapolações ( $m$ ) para a variável ( $Q_n$ ).**

No entanto, é verificado que há diferenças entre os resultados obtidos *a priori* e *a posteriori*. As ordens obtidas *a posteriori* estão mostradas na Tab. 4.6 bem como sua comparação com as ordens obtidas *a priori*.

**Tabela 4.6 – Comparação entre as ordens aparentes do erro de discretização obtidas *a priori* e *a posteriori*.**

Variável	Ordens <i>a priori</i>	Ordens <i>a posteriori</i>
$T_C$	2, 4, 6, ...	2, 4, 6, ...
$T_2$	2, 4, 6, ...	2, 4, 6, ...
$T_m$	2, 4, 6, ...	2, 4, 6, ...
$L$	2, 4, 6, ...	2, 3, 4, ...
$Q_e$	2, 3, 4, ...	2, 4, 6, ...
$Q_n$	2, 3, 4, ...	2, 3, 4, ...

## 4.5 CONCLUSÃO

Para a equação de Laplace bidimensional as múltiplas extrapolações de Richardson (MER) mostrou ser uma ferramenta extremamente eficiente na redução do erro de discretização.

Foi possível obter resultados precisos com MER chegando ao erro de arredondamento de máquina.

O objetivo de testar MER em maior número de malhas e observar e generalizando o seu comportamento foi atendido, sendo conclusivo que MER é mais efetivo em precisão quádrupla.

O estimador de erro ( $U_{mer}$ ) e ( $d\phi$ ) funcionam bem, demonstrando ser confiável.

As múltiplas extrapolações de Richardson (MER) é sensível a qualquer tipo de erro inclusive o de arredondamento ( $E_{\pi}$ ).



## 5 EQUAÇÃO DE POISSON UNIDIMENSIONAL

Para o problema de Laplace bidimensional, as malhas ( $g$ ) utilizadas foram 5x5, 9x9, 17x17, 33x33, até 8193x8193. Os pontos no domínio eram conhecidos para cada variável de interesse e havia uma sequência de soluções numéricas ( $\phi_g$ ). Desta forma, foi possível isolar o erro de discretização tornando-o

$$E(\phi) \cong f(E_h) . \quad (5.1)$$

Marchi *et al.* (2009) aborda o escoamento dentro de uma cavidade quadrada cuja tampa tem velocidade constante, modelado pelas equações de Navier-Stokes. Os resultados obtidos com 10 malhas, utilizando MER para velocidade máxima para  $u$  e  $v$  entre outras variáveis, não mostraram ganho nenhum na redução do erro de discretização.

Observa-se que no estudo de Marchi *et al.* (2009) as variáveis da velocidade e suas coordenadas eram incógnitas do problema diferentemente do que foi apresentado no capítulo anterior.

Este capítulo se concentra em investigar e tornar MER eficiente para problemas que apresentam máximo e/ou mínimo em que a variável de interesse e suas coordenadas são incógnitas do problema.

A equação utilizada é a de transferência de calor unidimensional por meio de uma parede plana com geração interna de calor. Essa equação é conhecida como equação de Poisson unidimensional. A geração interna de energia é introduzida na equação como um termo fonte, sendo esta uma função senoidal e assimétrica.

As variáveis de interesse são a temperatura  $\phi = T_{max}$  e sua coordenada  $\phi = x_{max}$ . A formulação usada com o termo fonte desloca o ponto de temperatura máxima do centro do domínio, e este ( $x$ ) está indefinido para a solução numérica.

A equação de Poisson é numericamente simples e possibilita grande número de testes para avaliar MER.

### 5.1 MODELO MATEMÁTICO

O modelo matemático utilizado é a equação de Poisson unidimensional definida no intervalo de  $[0, L]$  com condições de contorno de Dirichlet definida por

$$T(0) = 0 ; T(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (5.2)$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} + S = 0; \quad (5.3)$$

onde  $(T)$  é a temperatura,  $(x)$  é a coordenada espacial para  $0 \leq x \leq 1$  em metros e  $(S)$  é o termo fonte definido por

$$S = \left(\frac{3\pi}{4}\right)^2 \text{sen} \left[\left(\frac{3\pi}{4}\right)x\right]; \quad (5.4)$$

portanto, resolvendo a equação diferencial, a solução analítica se resume a

$$T(x) = \text{sen} \left[\left(\frac{3\pi}{4}\right)x\right]. \quad (5.5)$$

A Eq. (5.4) fornece uma função contínua limitada e diferenciável. O ponto de máximo da Eq. (5.5) é definido pelas Eqs. (3.21) e (3.22) sendo  $Y(x) = T(x)$ . Assim o valor da coordenada de máximo definido ( $x_{max}$ ), no intervalo de  $[0, 1]$  é

$$x = \frac{2}{3} \cong 6,666666666 \times 10^{-1}, \quad (5.6)$$

que substituído Eq. (5.5) resulta em

$$T_{max} = 1. \quad (5.7)$$

## 5.2 MODELO NUMÉRICO

A Eq. (5.3) é aproximada pelo método de diferenças finitas utilizando esquema *CDS* (*Central Difference Scheme*), malha uniforme, a partir da série de Taylor que resulta em

$$\frac{T(x_{i-1}) - 2 T(x_i) + T(x_{i+1}))}{h^2} + S_i = 0, \quad (5.8)$$

sendo ( $S_i$ ) o termo fonte, ( $i$ ) representa cada nó da malha, ( $h$ ) a distância entre dois nós. O termo fonte ( $S_i$ ) é definido por

$$S_i = (\pi)^2 \sin((\pi)x) \quad (5.9)$$

## 5.3 METODOLOGIA

Para as soluções do modelamento matemático e numérico foi utilizado um microcomputador com um processador Intel® Xeon Quad Core X5355 com 2,66 GHz e com 16GB memória RAM e sistema operacional Windows® XP 64 bits. O *software* utilizado para a solução analítica foi o Maple® 7.00. Para os cálculos efetuados com esse *software* utilizará precisão de 50 casas decimais.

Para as soluções numéricas, em diferenças finitas, foram elaborados em Fortran® 95, versão 9.1 da Intel®, usando precisão quádrupla (real\*16).

As soluções numéricas sem extrapolação do sistema de equações resultante da Eq. (5.8) foram obtidas com *TDMA* (*Tridiagonal Matrix Algorithm*). O programa desenvolvido para as soluções numéricas sem extrapolação é denominado de Poisson\_1DP1\_64BITS. As soluções numéricas com extrapolação foram obtidas por meio do pós-processamento utilizando MER. O programa atualizado que calcula os resultados numéricos com MER denomina-se Richardson\_3p0.

As interpolações polinomiais foram implementadas em Fortran® 95, versão 9.1 da Intel®, usando precisão quádrupla (real\*16) em diferenças divididas de Newton.

## 5.4 RESULTADOS OBTIDOS

Para todos os resultados numéricos sem e com extrapolação foram utilizados precisão quádrupla nos cálculos. Para os resultados numéricos sem extrapolação da temperatura máxima ( $T_{max}$ ) e da sua coordenada ( $x$ ) foram calculados para até 19 malhas com ( $h$ ) variando de  $2,500 \times 10^{-1}$  até  $1,907 \times 10^{-6}$ , ou seja:

$$h = \left( \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \frac{1}{32}; \dots; \frac{1}{524288} \right),$$

com razão de refino 2, e para o domínio variando de  $[0, 1]$ . Para os resultados numéricos com extrapolação a partir da Eqs. (3.1) e (3.17) utilizou-se  $G=18$ ,  $m=18$  e  $p_m=2,4,6, \dots$

Para a solução numérica da temperatura máxima ( $T_{max}$ ), observa-se na Fig. 5.1 que as coordenadas dos nós onde estão estas informações, em diversas malhas ( $g$ ), variam em relação a origem do sistema coordenado.

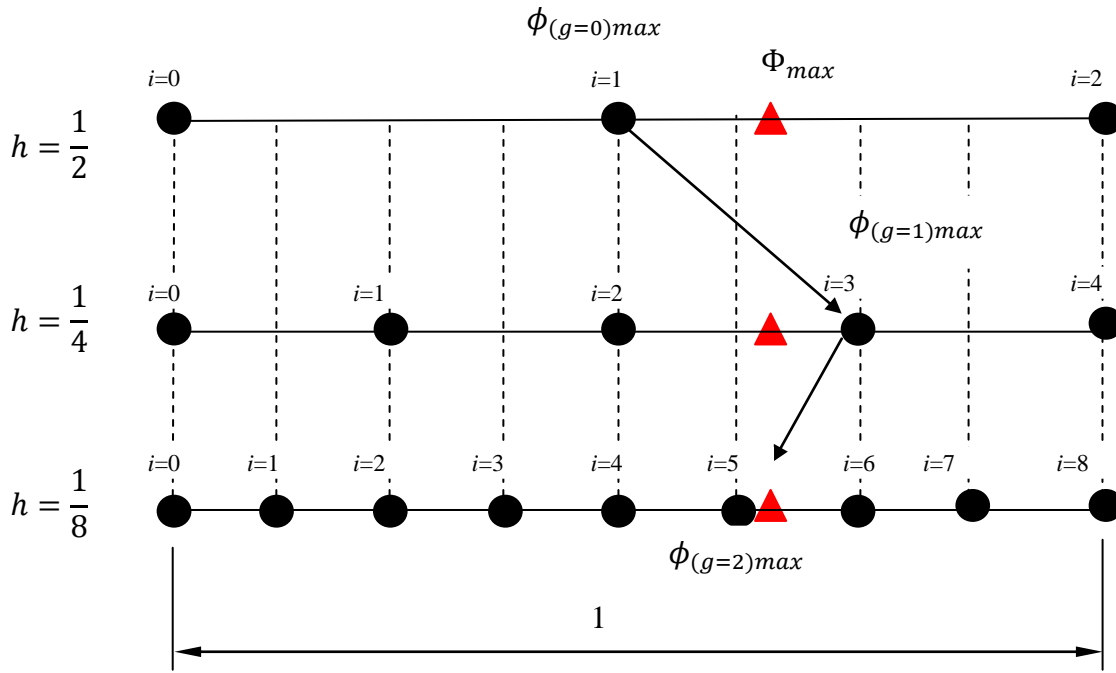
Para exemplificar este caso, o refino de malha, para a Fig. (5.1), é  $r = 2$ . As malhas são:  $h = \frac{1}{2}$ ,  $h = \frac{1}{4}$  e  $h = \frac{1}{8}$ . Os nós ( $i$ ) são definidos por círculos cheios. A temperatura máxima analítica ( $\Phi_{max}$ ) é definida pela Eq. (5.6) e é esquematizada na Fig. (5.1) por triângulos sólidos. A temperatura máxima da solução numérica ( $\phi_{max}$ ) em cada malha é definida pelo maior valor de todas as soluções numéricas ( $\phi_g$ ) obtidas para a mesma malha. As posições ( $x$ ) em relação a origem dos nós nas três malhas ( $g$ ) no domínio  $[0,1]$  para a Fig. (5.1) muda, o que caracteriza a existência do erro de posição ( $E_D \neq 0$ ).

A ineficiência de MER, para as soluções numéricas extrapoladas, desenvolvidas neste capítulo, é devido a existência do erro de posição associada as variáveis de interesse. Pode-se, portanto, generalizar a equação geral do erro, para as soluções numéricas representadas na fig. (5.1) como sendo

$$E(\phi) \cong f(E_h, E_D) . \quad (5.10)$$

Portanto, para tornar MER eficiente para o problema de Poisson unidimensional é preciso fazer com que o erro de posição seja reduzido ao valor muito pequeno, ou seja,

$$E_D \cong 0 . \quad (5.11)$$



**Figura 5.1 – Refino de malha com  $(\epsilon_D \neq 0)$ .**

A Fig. (5.1) mostra as soluções numéricas para a temperatura máxima ( $\phi_{max} = T_{max}$ ) para a malha  $h = \frac{1}{2}$  posicionado no nó  $i=1$ , para  $h = \frac{1}{4}$  posicionado no nó  $i=3$  e para  $h = \frac{1}{8}$  posicionado no nó  $i=5$ . A posição dos nós em relação a origem do sistema muda para cada malha caracterizando a existência do erro de posição nas soluções numéricas ( $T_{max}$ ) nas três malhas.

A coordenada do ponto de máximo ( $x_{max}$ ) é função dos resultados da temperatura máxima que é definida com a distância do nó que carrega o valor da temperatura máxima ( $T_{max}$ ) até a origem do sistema coordenado. O valor de  $x_{max}$  é obtido pela medição da distância entre um dado nó e a origem do sistema coordenado

A Figs. 5.2 e 5.3 apresentam para as variáveis ( $T_{max}$ ) e ( $x_{max}$ ) o efeito da utilização de MER com as soluções numéricas obtidas pelo procedimento tratado na Fig. 5.1. Neste gráfico, ( $E_h$ ) é o erro da solução numérica ( $\phi$ ) sem qualquer extrapolação, definido pela Eq. (1.1); ( $d\phi$ ) é o estimador definido pela Eq. (4.20); ( $U_h$ ) é a estimativa de ( $E_h$ ), definido pela Eq. (3.18). ( $E_{mer}$ ) é o erro da solução numérica ( $\phi$ ) com extrapolação, definido pelas Eqs. (1.1) e (3.1). E, ( $U_{mer}$ ) é a estimativa de ( $E_{mer}$ ). ( $E_{mer}$ ) decai assintoticamente quando  $h \rightarrow 0$ . As ordens do erro de discretização *a priori* calculada para a Eq. (5.8) são 2,4,6,....

Para a Fig. 5.2, fixando um tamanho de malha de aproximadamente  $10^{-4}$ , verifica-se que o ganho na redução do erro de discretização é da ordem de  $10^{-9}$  para  $10^{-12}$ . Comparado

estes resultados os obtidos no Cap. 4 para precisão quádrupla observa-se que MER aplicado nestas condições resulta em reduções do erro de discretização muito abaixo do esperado. A estimativa do erro ( $U_{mer}$ ) não funciona.

Para as variáveis ( $T_{max}$ ) e ( $x_{max}$ ) o comportamento de ( $U_h$ ) coincide com o comportamento de ( $E_h$ ), mostrando que o estimador de erro de Richardson funciona bem quando associado com o erro de discretização da solução numérica sem extrapolação mesmo com erro de posição.

Foram utilizadas as ordens verdadeiras do erro de discretização para a Eq.(3.1), com base no estudo *a priori*, como sendo a ordem assintótica ( $p_0 = 2$ ) e a sua variação ( $dp_0 = 2$ ), isto é  $p_m = 2, 4, 6, \dots$  tanto para ( $T_{max}$ ) e ( $x_{max}$ ).

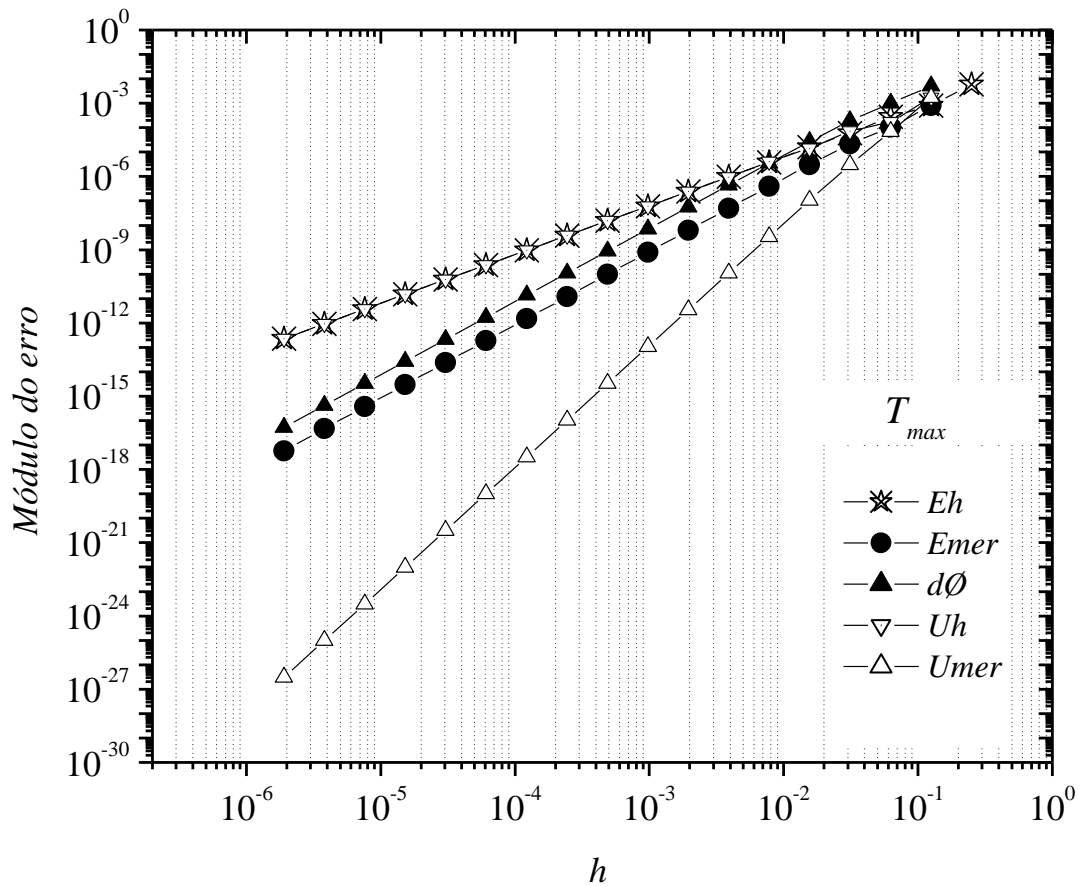


Figura 5.2 - Módulo do erro *versus* ( $h$ ) sem interpolação com  $p_0=2$  e  $dp_0=2$ .

Na Fig. 5.3, fixando um tamanho de malha de aproximadamente  $10^{-4}$ , verifica-se que não há o ganho algum na redução do erro de discretização. Além disso, não há parâmetro para afirmar que ( $U_{mer}$ ) funcione para as condições aplicadas.

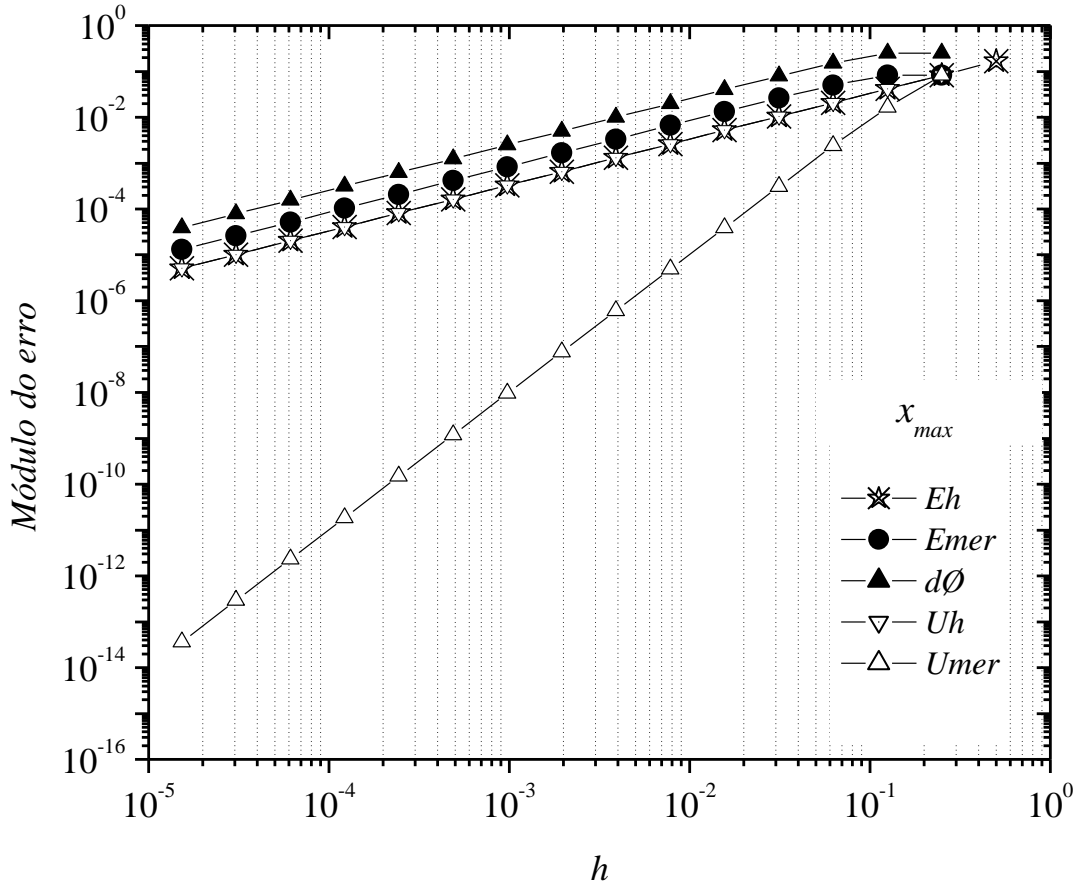


Figura 5.3 - Módulo do erro *versus* ( $h$ ) sem interpolação com  $p_0=2$  e  $dp_0=2$ .

As tendências das ordens efetivas para a variável ( $T_{max}$ ) são mostradas na Tab. 5.1. Observa-se que para  $m=0$  a ordem efetiva tende claramente a 2, comprovando *a posteriori* a ordem assintótica deduzida *a priori*. Para  $m=1$  a tendência da ordem efetiva é 3, mostrando ser diferente da ordem obtida *a priori*. Esta ordem deveria ser 4.

Após a primeira extrapolação em  $m=1$ , não se pode afirmar mais sobre as tendências das ordens efetivas apresentadas na Tab. 5.1. Portanto, a partir de  $m>1$  os resultados são incoerentes e inconsistentes com base na Eq. (3.2).

Para as tendências das ordens efetivas para a variável ( $x_{max}$ ) são mostradas na Tab. 5.2. Observa-se que para  $m=0$  a ordem efetiva tende claramente a 1. A respeito das outras ordens efetivas  $m>0$  não se pode afirmar nada a respeito de suas tendências.

Os resultados obtidos na Tab. 5.1 sugerem que as ordens efetivas para a variável ( $T_{max}$ ) são para  $m=0 \rightarrow p_E = 2$  e para  $m=1 \rightarrow p_E = 3$ . Poderia se pensar que as ordens verdadeiras fossem  $p_0 = 2$  com  $dp_0 = 1$ . Para confirmar esta nova situação, foi obtido para a variável ( $T_{max}$ ) novo resultado utilizando as ordens do erro com sendo 2,3,4... Entretanto,

observa-se que o novo resultado apresentado para ( $E_{mer}$ ) e mostrado na Fig. 5.4 é pior que o mostrado na Fig. 5.2. As ordens usadas com  $dp_0 = 1$  apresentam ser incoerentes nesta simulação numérica.

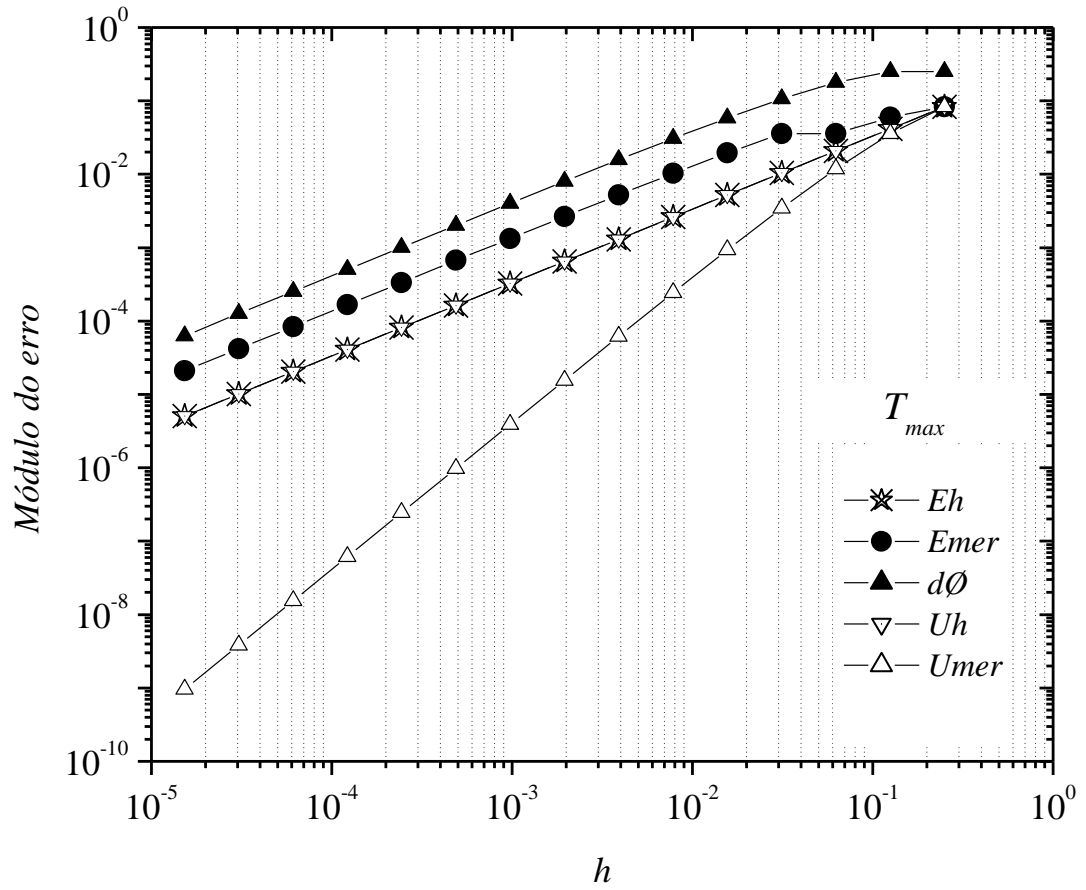


Figura 5.4 - Módulo do erro versus ( $h$ ) sem interpolação com  $p_0=2$  e  $dp_0=1$ .



**Tabela 5.1 – Tendência da Ordem efetiva ( $p_E$ ) para a variável ( $T_{max}$ ) de ( $E_h$ ) e ( $E_{mer}$ ) em função de ( $h$ ).**

$h$	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$
5,0000000e-01					
2,5000000e-01	1,6560263e-01				
1,2500000e-01	2,8998917e+00	2,7437688e+00			
6,2500000e-02	1,5272758e+00	3,1592008e+00	3,0237008e+00		
3,1250000e-02	2,2288458e+00	2,9296199e+00	3,0077427e+00	3,0095331e+00	
1,5625000e-02	1,8839621e+00	3,0373066e+00	3,0016829e+00	3,0023582e+00	3,0025765e+00
7,8125000e-03	2,0575850e+00	2,9818986e+00	3,0004502e+00	3,0005873e+00	3,0006410e+00
3,9062500e-03	1,9711029e+00	3,0091858e+00	3,0001088e+00	3,0001467e+00	3,0001601e+00
1,9531250e-03	2,0144219e+00	2,9954412e+00	3,0000277e+00	3,0000367e+00	3,0000400e+00
9,7656250e-04	1,9927825e+00	3,0022879e+00	3,0000069e+00	3,0000092e+00	3,0000100e+00
4,8828125e-04	2,0036071e+00	2,9988582e+00	3,0000017e+00	3,0000023e+00	3,0000025e+00
2,4414063e-04	1,9981960e+00	3,0005714e+00	3,0000004e+00	3,0000006e+00	3,0000006e+00
1,2207031e-04	2,0009019e+00	2,9997144e+00	3,0000001e+00	3,0000001e+00	3,0000002e+00
	Tendência de $E_h$ $p_0 \rightarrow 2$	Tendência de $E_{mer}$ $p_1 \rightarrow 3$	Tendência de $E_{mer}$ $p_2 \rightarrow 3$ incoerente	Tendência de $E_{mer}$ $p_3 \rightarrow 3$ incoerente	Tendência de $E_{mer}$ $p_4 \rightarrow 3$ incoerente

Tabela 5.2 – Tendência da Ordem efetiva ( $p_E$ ) para a variável ( $x_{max}$ ) de ( $E_h$ ) e ( $E_{mer}$ ) em função de ( $h$ ).

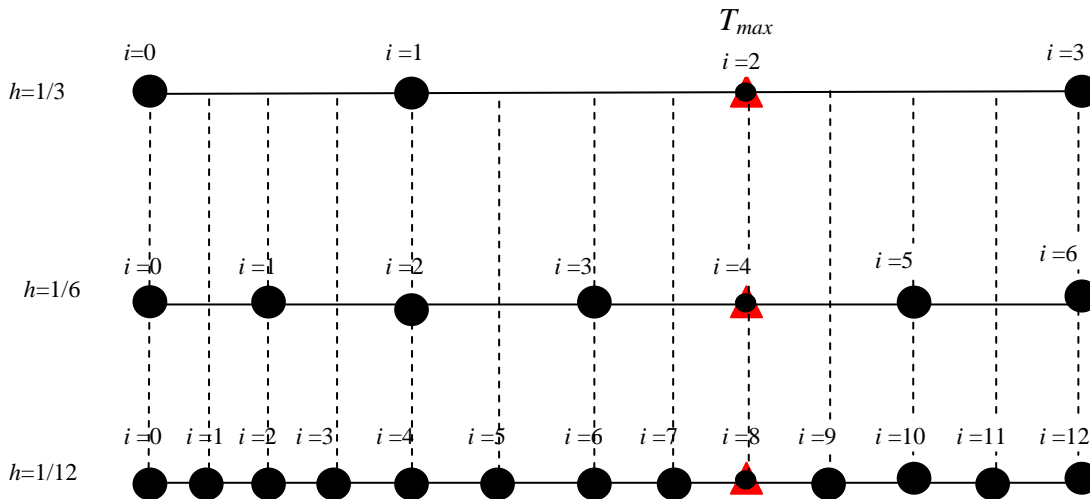
$h$	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$
5,0000000e-01					
2,5000000e-01	1,0000000000000e+00				
1,2500000e-01	1,0000000000000e+00	1,0000000000000e+00			
6,2500000e-02	1,0000000000000e+00	1,0000000000000e+00	1,0000000000000e+00		
3,1250000e-02	9,999999999999e-01	1,0000000000000e+00	1,0000000000000e+00	1,0000000000000e+00	
1,5625000e-02	1,0000000000000e+00	9,999999999999e-01	1,0000000000000e+00	1,0000000000000e+00	9,999999999999e-01
7,8125000e-03	1,0000000000000e+00	1,0000000000000e+00	1,0000000000000e+00	1,0000000000000e+00	1,0000000000000e+00
3,9062500e-03	1,0000000000000e+00	1,0000000000000e+00	1,0000000000000e+00	1,0000000000000e+00	1,0000000000000e+00
1,9531250e-03	1,0000000000000e+00	1,0000000000000e+00	1,0000000000000e+00	1,0000000000000e+00	1,0000000000000e+00
9,7656250e-04	1,0000000000000e+00	1,0000000000000e+00	1,0000000000000e+00	1,0000000000000e+00	9,999999999999e-01
4,8828125e-04	9,999999999999e-01	1,0000000000000e+00	1,0000000000000e+00	1,0000000000000e+00	1,0000000000000e+00
2,4414063e-04	1,0000000000000e+00	9,999999999999e-01	1,0000000000000e+00	1,0000000000000e+00	1,0000000000000e+00
1,2207031e-04	1,0000000000000e+00	1,0000000000000e+00	1,0000000000000e+00	9,999999999999e-01	9,999999999999e-01
	Tendência de $E_h$ $p_0 \rightarrow 2$	Tendência de $E_{mer}$ $p_1 \rightarrow 3$	Tendência de $E_{mer}$ $p_2 \rightarrow 3$ incoerente	Tendência de $E_{mer}$ $p_3 \rightarrow 3$ incoerente	Tendência de $E_{mer}$ $p_4 \rightarrow 3$ incoerente

O problema da ineficiência de MER foi testado nos ensaios numéricos desenvolvidos e mostrado nas Figs. 5.2, 5.3 e 5.4.

Para confirmar que MER pode ser efetivo com a redução do erro de posição conforme definido pela Eq.(3.30) é desenvolvido o mesmo experimento da Fig. (5.1) utilizando a formulação de Poisson unidimensional que possui solução analítica conforme Eqs. (5.5) e suas respostas para a temperatura máxima ( $\Phi_{max}$ ) conforme Eq. (5.6) e para a coordenada conforme Eq. (5.7) em  $x = \frac{2}{3}$ . A solução numérica ( $\phi_{max}$ ) é conforme a Eq.(5.8), sendo que o refino de malha ( $r = 2$ ).

Entretanto, neste novo exemplo, haverá sempre um nó na coordenada  $x = \frac{2}{3}$  para  $h \rightarrow 0$ . As malhas utilizadas nesta análise são 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, 1536, 3072 e 6144. Este experimento, utilizando o refino de malha ( $r = 2$ ) e irá forçar o erro de posição ser igual a zero ( $\epsilon_D = 0$ ) devido a não ter variação da posição conforme explicado na Fig. 3.7.

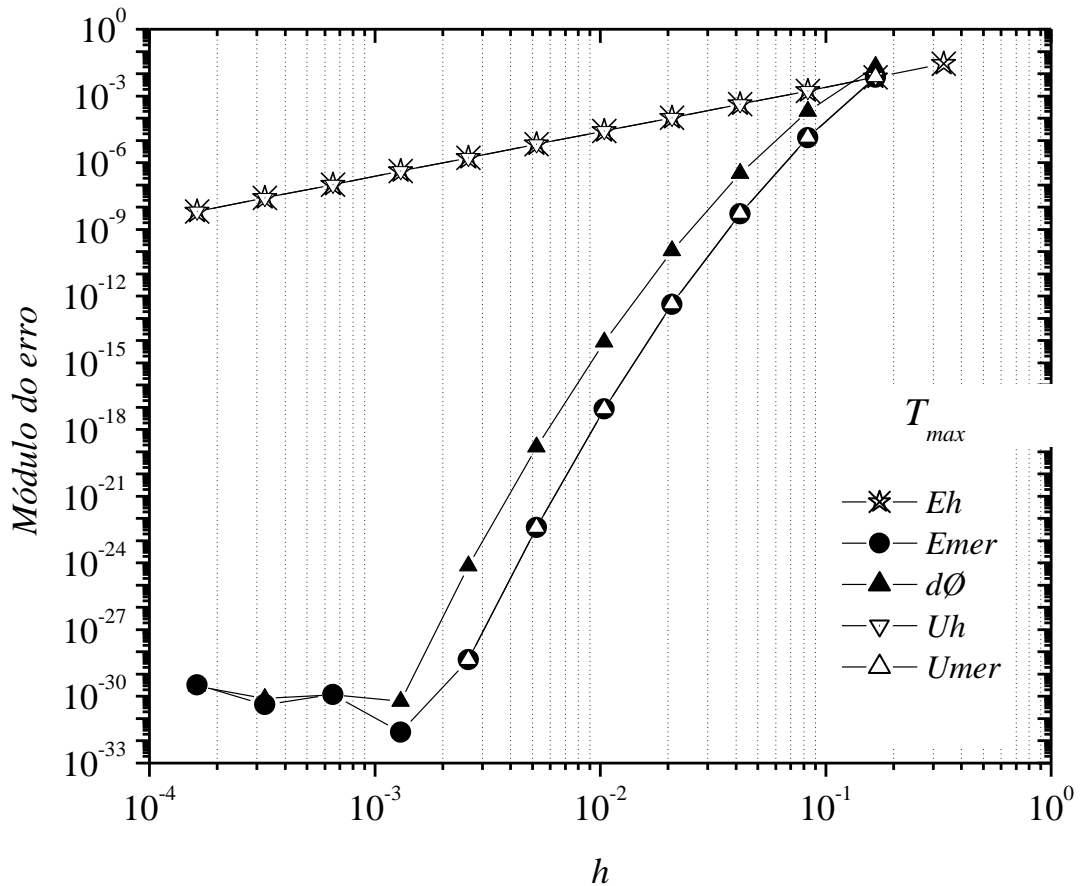
Na Fig. 5.5, a temperatura máxima ( $\Phi_{max} = T_{max}$ ) está mostrada por triângulos sólidos. A localização dos nós ( $i$ ) de para a temperatura máximo numérica em diversas malhas é representada por nós negros nas posições a ( $i$ )=2 para a malha  $h = \frac{1}{3}$ , ( $i$ )=4 para a malha  $h = \frac{1}{6}$  e ( $i$ )=8 para a malha  $h = \frac{1}{12}$ . O ponto de máximo, nas três malhas, foi representado com círculo sólido menor para diferenciar dos outros nós. Esta diferenciação é para enfatizar que agora ( $\epsilon_D = 0$ ) nas três malhas esquematizadas na Fig. 5.5 e diferenciando da Fig. 5.1.



**Figura 5.5 – Refino de malha com ( $\epsilon_D = 0$ )**

Na Fig. 5.6 é apresentado o resultado para o experimento conforme descrito na Fig. 5.5. Observa-se que a eficiência de MER é ótima e realmente está relacionada com os tipos de erro contidos nas soluções numéricas sem extrapolação.

$(E_{mer})$  cai até atingir o erro de arredondamento.  $(U_{mer})$  se comporta muito bem sendo visualmente acurado e confiável. A solução obtida para  $(T_{max})$  a partir das malhas 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, 1536, 3072 e 6144 será definida como solução ideal.  $(E_h)$  cai até atingir o erro de arredondamento.  $(U_h)$  se comporta muito bem sendo visualmente acurado e confiável.  $(d\phi)$  é inacurado e confiável.



**Figura 5.6 – Módulo do erro versus  $(h)$  sem interpolação com  $p_0=2$  e  $dp_0=2$  sem erro de posição.**

As ordens efetivas ( $p_E$ ) para a variável  $(T_{max})$  sem erro de posição são apresentadas na Fig. 5.7 e comprovam *a posteriori* as ordens do erro calculadas *a priori*. Os valores obtidos para a solução da Fig. 5.6 são claramente identificados nessa figura como sendo:

- $(p_0 = 2)$ ;
- $(p_1 = 4)$ ;
- $(p_2 = 6)$ ;

- ( $p_3 = 8$ );
- ( $p_4 = 10$ ); e
- ( $p_5 = 12$ ).

As demais ordens não são identificadas devido à interferência do erro de arredondamento.

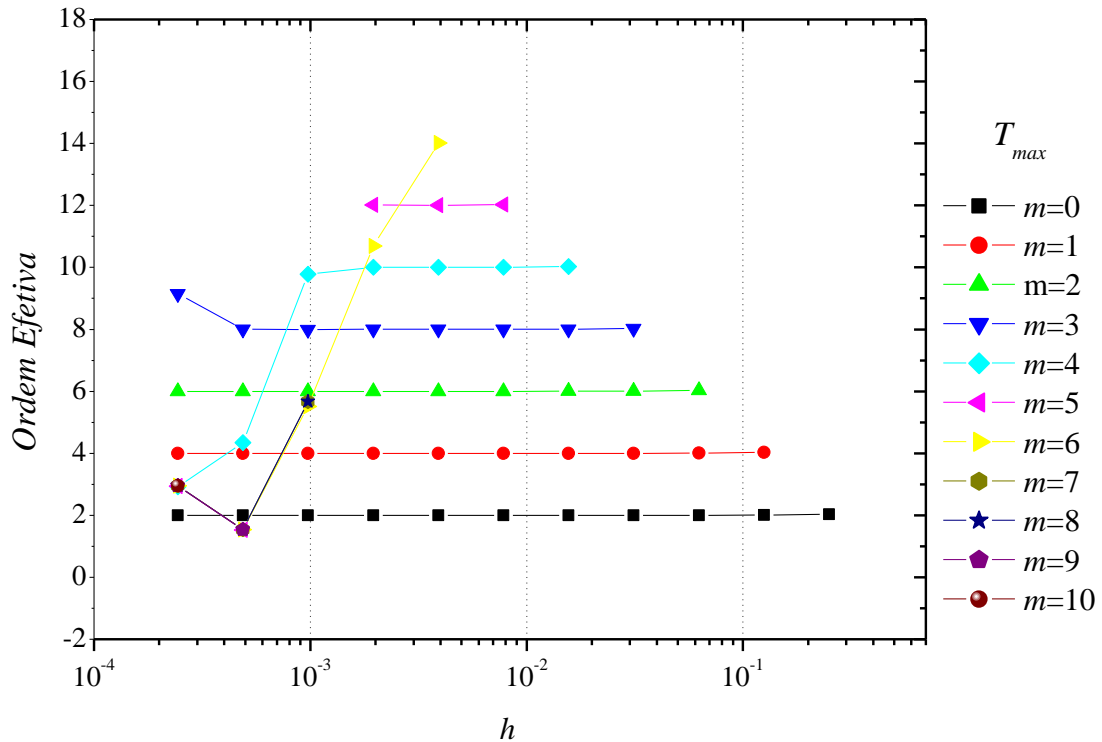


Figura 5.7 – Ordem efetiva ( $p_E$ ) versus o tamanho da malha ( $h$ ) e número de extrapolações ( $m$ ).

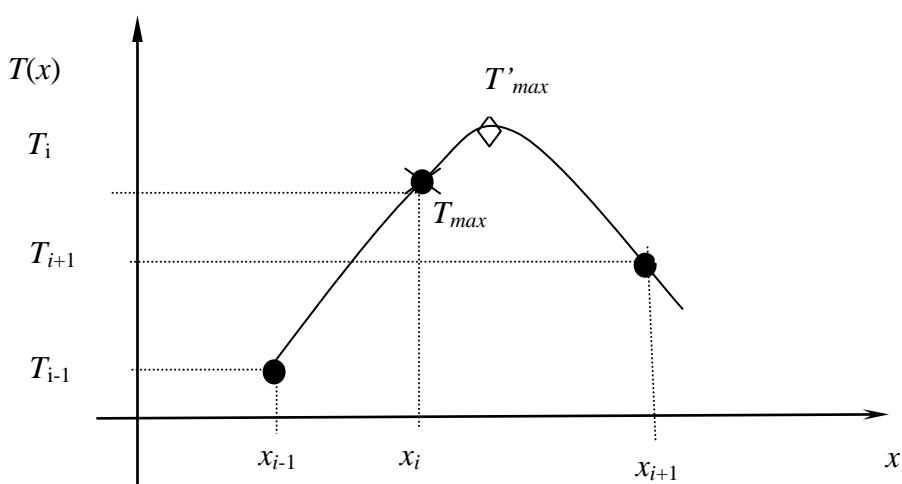
#### 5.4.1 Interpolação polinomial em Poisson unidimensional com MER

A partir das soluções numéricas obtidas pelo programa Poisson\_1Dp\_3p1\_64BITS associadas à MER conforme Fig. 5.1 foram investigadas três situações para aumentar a eficiência de MER para as variáveis ( $T_{max}$ ) e ( $x_{max}$ ):

- Aplicação de MER a partir do tratamento da base de dados por meio de interpolação de segunda ordem dos nós da malha obtida pelo programa Poisson\_1Dp\_3p1\_64BITS.
- (Aplicação de MER a partir do tratamento da base de dados por meio de interpolação de quarta ordem dos nós da malha obtida pelo programa Poisson\_1Dp\_3p1\_64BITS
- Aplicação de MER a partir do tratamento da base de dados por meio de interpolação de décima ordem dos nós da malha obtida pelo programa Poisson\_1Dp\_3p1\_64BITS.

Pode-se perceber que MER não é eficiente devido ao erro de posição contido nas soluções numéricas e comprovado nos resultados mostrados nas Figs. 5.2 e 5.3. O resultado observado na Fig. 5.6 deixa evidente que MER é extremamente eficiente quando a fonte principal de erro da solução numérica é o erro de discretização. Para minimizar o erro de posição, será interpolado nas soluções numéricas sem extrapolação um polinômio.

Na Fig. 5.8 é mostrado o esquema de interpolação aplicado. O ponto de  $(T_{max})$  é indefinido como já explicado neste capítulo. Os círculos negros são as soluções numéricas obtidas pelo programa Poisson\_1Dp\_3p1\_64BITS. O losango representa o ponto de temperatura máxima da função  $\Omega(x)$  interpolada a partir dos nós  $(i)$ .



#### Legenda

- nós da malha gerados por meio de Poisson\_1Dp\_3p1\_64BITS -  $T(x)$ .
- função interpolada  $\Omega(x)$ .
- ◇ máximo da função  $\Omega(x) = T'_{max}$ .

**Figura 5.8 - Esquema de interpolação dos dados obtidos por Poisson\_1Dp\_3p1\_64BITS .**

Para determinar  $(T_{max})$  é executada a interpolação polinomial a partir dos pontos da malha. Neste caso, para a interpolação de segunda ordem utilizam-se 3 pontos da malha. Para interpolação de quarta e décima ordens utilizam-se 5 e 11 nós da malha respectivamente. Os pontos a serem interpolados são escolhidos a partir do ponto de máximo discreto definido por  $(T_{max})$ . O nó central é o ponto de máximo discreto definido por  $(i)$ . Como a interpolação

nestes casos utiliza números ímpares de nós, o nó central é o ponto de máximo discreto ( $T_{max}$ ).

A geração da função contínua  $\Omega(x)$  é obtida por meio da interpolação utilizando como base as soluções numéricas sem extrapolação obtidas diretamente no programa Poisson\_1Dp\_3p1\_64BITS e suas respectivas coordenadas ( $x$ ). Será formado um número adequado de pares ordenados  $(T_i, x_i)$  compatível com a ordem do polinômio interpolador.

Para interpolação de segunda ordem foi utilizada interpolação polinomial quadrática, definida pelas Eq. (3.37).

Para interpolação de quarta e décima ordens foi utilizada interpolação polinomial de Newton, definida pelas Eq. (3.38).

Para a interpolação de quarta ordem são necessários 5 pontos; portanto, sendo descartado as malhas anteriores a  $h=0,125$ . Para a interpolação de décima ordem são necessários 11 pontos; sendo descartadas as malhas anteriores a  $h=0,0626$ .

Para localizar o ponto de temperatura máxima ( $T_{max}$ ) e ( $x_{max}$ ) da função interpolada  $\Omega(x)$  foi seguido o seguintes passos denominado de procedimento Ômega:

1- Obter os coeficientes dos polinômios:

(a) Polinômio de segunda ordem : Eqs. (3.39), (3.40), (3.41) e (3.42).

(b) Polinômio de quarto e décima ordens : Eqs. (3.43), (3.44), (3.45), (3.46) e (3.47) .

2- Derivar numericamente a função interpolada  $\Omega(x)$  obtendo  $C$  e  $\Omega^{(ii)}(x)$ :

(a) Para  $\Omega^{(i)}$ : utilizar o método de Newton Raphson para obter as raízes da função  $\Omega^{(i)}(x)$ . O critério de interrupção do processo iterativo:  $\leq 1,0 \times 10^{-16}$ .

(b) Para  $\Omega^{(ii)}(x)$ : utilizar o método de Newton Raphson para obter as raízes da função  $\Omega^{(ii)}(x)$ . O critério de interrupção do processo iterativo:  $\leq 1,0 \times 10^{-16}$  .

3- Verificar a concavidade da função  $\Omega^{(ii)}(x)$ .

4- Verificar os zeros da função  $\Omega^{(i)}(x)$ , que corresponde a  $(T'_{max})$ , está no intervalo previsto, isto é:

(a) Para o intervalo  $[i-1, i+1]$  : interpolação de segunda ordem.

(b) Para o intervalo  $[i-2, i+2]$  : interpolação de quarta ordem.

(c) Para o intervalo  $[i-5, i+5]$  : interpolação de décima ordem.

5- Utilizar  $(T'_{max})$  na função  $\Omega(x)$  e calcular  $(x'_{max})$ .

6- Calcular MER.

7- Calcular os respectivos módulos dos erros:  $(E_h)$ ,  $(E_h)$ ,  $(E_{mer})$ ,  $(U_{mer})$  e  $(d\phi)$ .

#### 5.4.2 Aplicação de MER por meio de interpolação de segunda ordem

Para as soluções numérica sem extrapolação ( $\phi$ ) em uma mesma malha ( $g$ ) foi obtido a temperatura máxima ( $T_{max}$ ) que é o maior valor de todas as soluções numéricas resultante do programa Poisson\_1Dp\_3p1\_64BITS. Para cada malha ( $g$ ), a partir do referencial de ( $T_{max}$ ), foi interpolada uma função  $\Omega_g(x)$  onde ( $g$ ) representa a malha em estudo. O valor máximo desta função polinomial de segunda ordem  $\Omega_g(x)$  é denominada de solução numérica interpolada ( $T'_{max}$ ). O erro e as sua estimativa com e sem MER para as soluções numéricas ( $T'_{max}$ ) obtida para cada tamanho de malha ( $h$ ) são mostrados Fig.5.9. Com base nesta figura conclui-se:

- Para  $(U_h)$  : o estimador de Richardson ( $U$ ) demonstra ser acurado e confiável em relação a  $(E_h)$ .
- Para  $(U_{mer})$  : o erro da solução extrapolada ( $E_{mer}$ ), mostrado na Fig. 5.9, é menor que os resultados apresentados na Fig. 5.2. Entretanto,  $(U_{mer})$  mostra-se inacurado e não confiável.
- Para  $(d\phi)$ : o estimador é inacurado, porém confiável.

Foram utilizados nos cálculos as ordens verdadeira  $p_m = 2, 4, 6 \dots$

As soluções numéricas para  $(x'_{max})$  são obtidos pela substituição direta de  $(T'_{max})$  na equação  $\Omega_g(x)$ . O erro e as sua estimativa com e sem MER para as soluções numéricas  $(x'_{max})$  obtida para cada tamanho de malha ( $h$ ) são mostrados na Fig.5.10. Com base nesta figura conclui-se:

- Para  $(U_h)$  : o estimador de Richardson demonstra ser acurado e confiável em relação a  $(E_h)$ .
- Para  $(U_{mer})$  : o erro da solução extrapolada ( $E_{mer}$ ), mostrado na Fig. 5.10, é menor que os resultados apresentados na Fig. 5.3. Entretanto,  $(U_{mer})$  mostra-se inacurado e não confiável.
- Para  $(d\phi)$ : o estimador é inacurado e confiável.



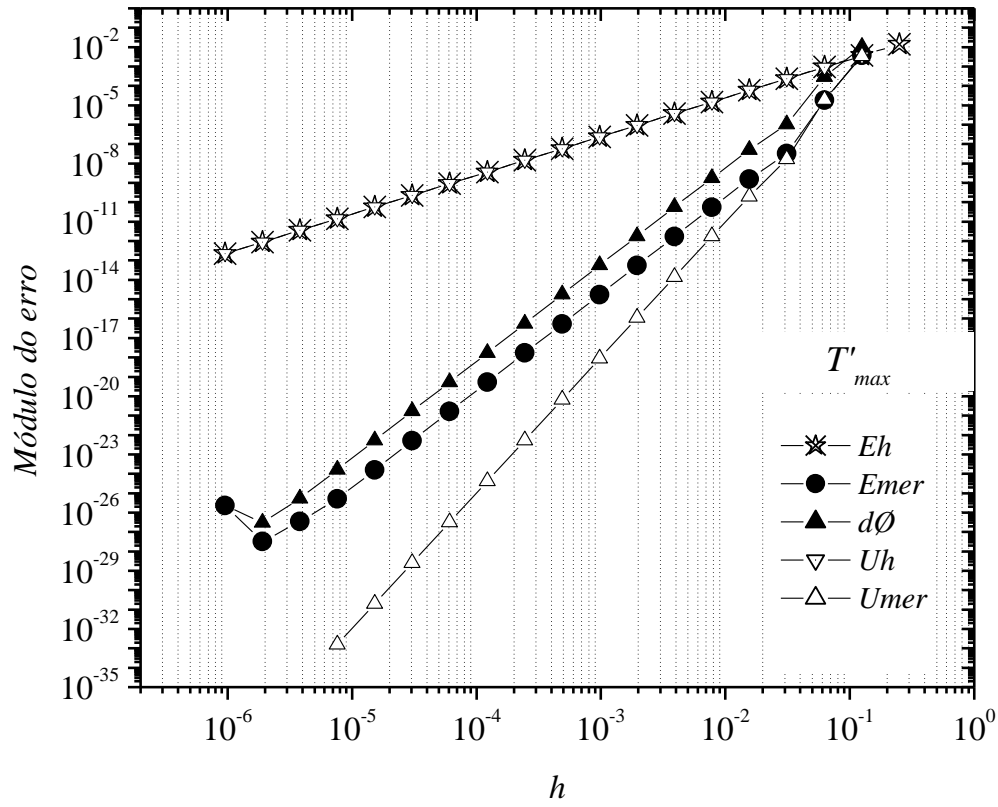


Figura 5.9 - Módulo do erro versus ( $h$ ) para interpolação de ordem 2 com  $p_0=2$  e  $dp_0=2$ .

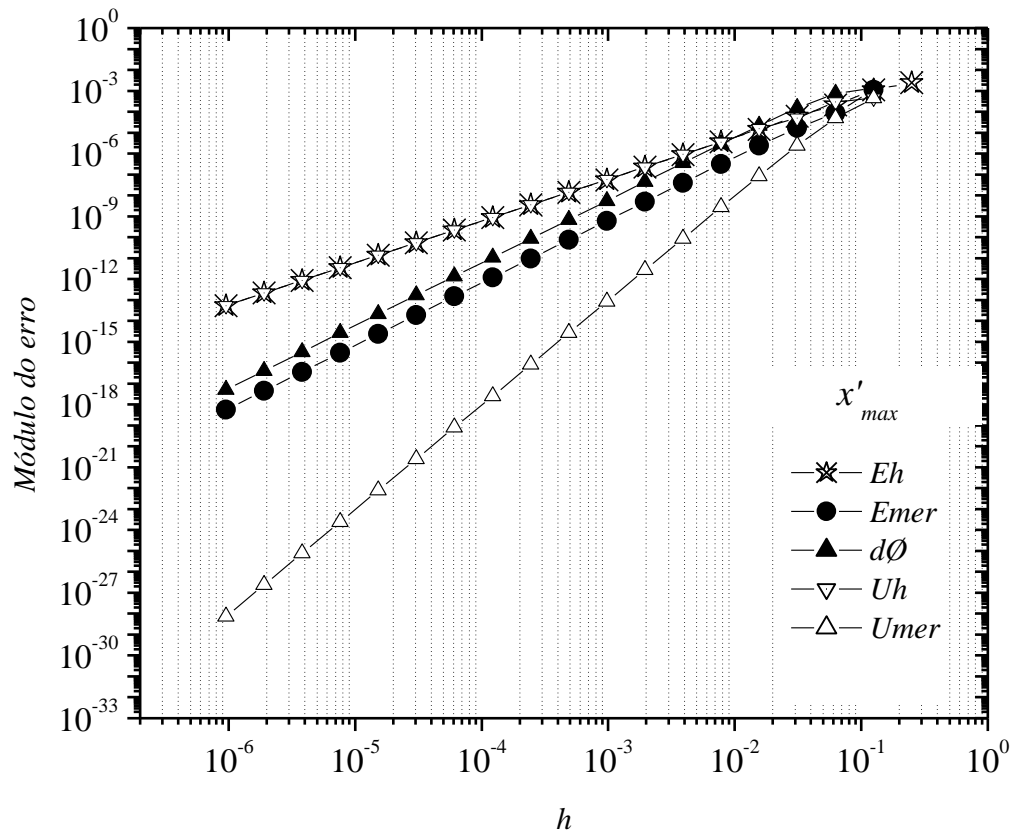


Figura 5.10 - Módulo do erro versus ( $h$ ) para interpolação de ordem 2 com  $p_0=2$  e  $dp_0=2$ .

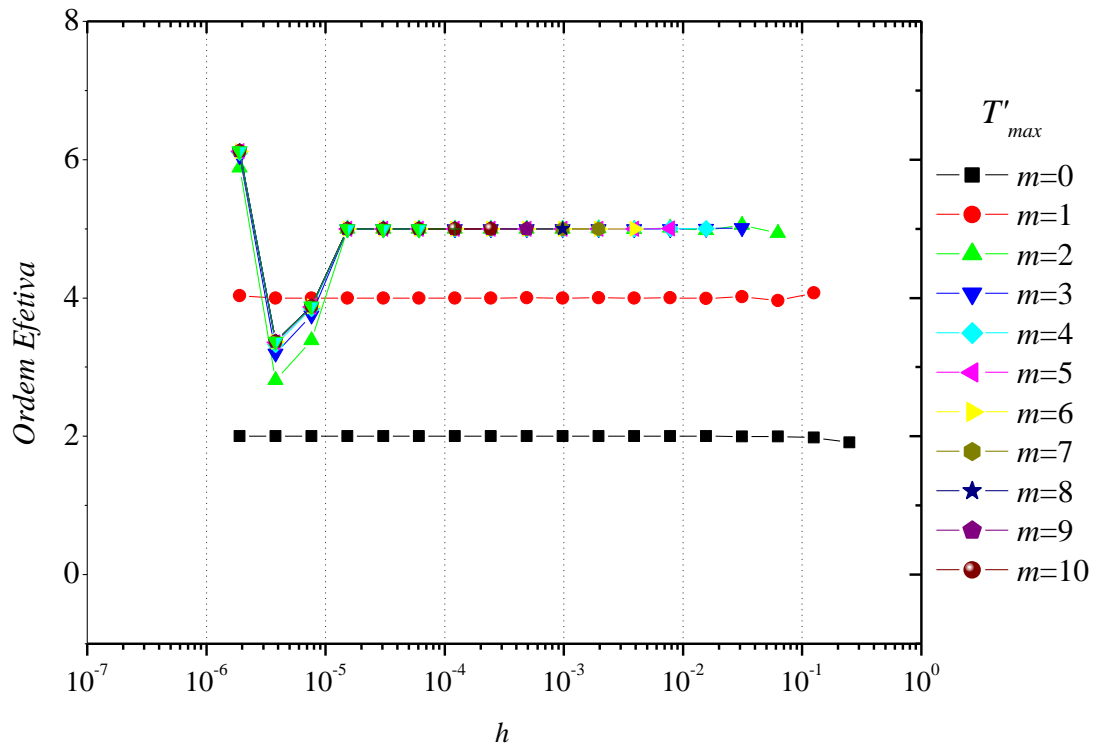
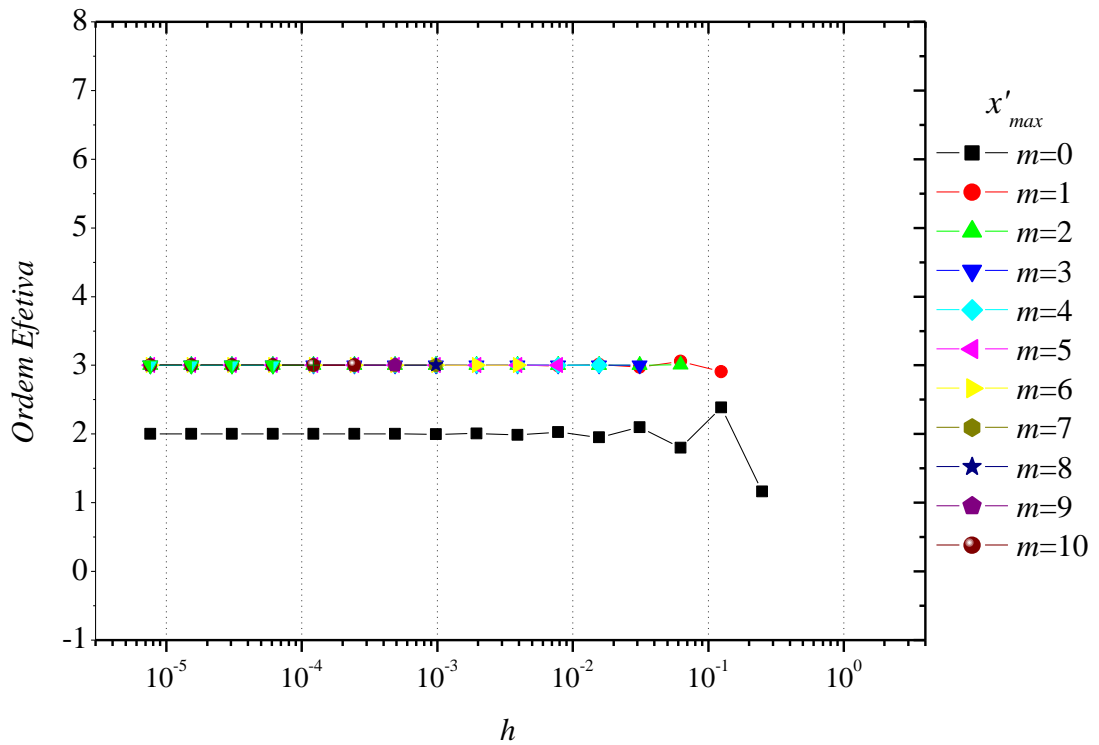
(a) Para ( $T'_{max}$ )(b) Para ( $x'_{max}$ )

Figura 5.11 - Ordem efetiva ( $p_E$ ) versus o tamanho da malha ( $h$ ) e número de extrapolações ( $m$ ) para interpolação de ordem 2.

As ordens efetivas da variável ( $T'_{max}$ ) são mostradas na Fig. 5.11 (a). São identificadas as ordens efetivas são 2 e 4 para solução numérica com a extrapolação apresentada. A partir da extrapolação  $m>1$  não se pode afirmar a ordem efetiva da solução.

As ordens efetivas da variável ( $x'_{max}$ ) são mostradas na Fig. 5.11 (b). É identificada uma única ordem efetiva: ( $p_E = 2$ ) para  $m=0$ . A partir da extrapolação  $m>0$  não se pode afirmar a ordem efetiva da solução.

### 5.4.3 Aplicação de MER por meio de interpolação de quarta ordem

Para as soluções numérica sem extrapolação ( $\phi$ ) em uma mesma malha ( $g$ ) obtido do programa Poisson\_1Dp\_3p1\_64BITS foi determinado a temperatura máxima ( $T_{max}$ ). Para cada malha ( $g$ ), a partir do referencial de ( $T_{max}$ ), foi interpolada uma função polinomial de quarta ordem denominada de  $\Omega_g(x)$ . O valor máximo desta função polinomial de quarta é a solução numérica interpolada para a temperatura máxima ( $T'_{max}$ ). O erro e as sua estimativa com e sem MER para as soluções numéricas ( $x'_{max}$ ) obtida para cada tamanho de malha ( $h$ ) são mostrados na Fig.5.12. Com base nesta figura conclui-se:

- Para ( $U_h$ ) : o estimador de Richardson demonstra ser acurado e confiável em relação a ( $E_h$ ).
- Para ( $U_{mer}$ ) : o erro da solução extrapolada ( $E_{mer}$ ), mostrado na Fig. 5.12, é menor que os resultados apresentados na Fig. 5.9. Entretanto, ( $U_{mer}$ ) mostra-se ser acurado e confiável até o tamanho de malha ( $h$ ) com  $10^{-2}$ . Após isto, este estimador torna-se inacurado e não confiável.
- Para ( $d\phi$ ): o estimador é inacurado, porém confiável.

Foram utilizados nos cálculos as ordens verdadeira  $p_m = 2, 4, 6, \dots$

Os valores para a coordenada ( $x'_{max}$ ) são obtidos diretamente da equação interpolada  $\Omega_g(x)$  a partir da substituição dos valores temperatura máxima ( $T'_{max}$ ). O erro e as sua estimativa com e sem MER para as soluções numéricas ( $x'_{max}$ ) obtida para cada tamanho de malha ( $h$ ) são mostrados na Fig.5.13. Com base nesta figura conclui-se:

- Para  $(U_h)$  : o estimador de Richardson demonstra ser acurado e confiável em relação a  $(E_h)$ .
- Para  $(U_{mer})$  : o erro da solução extrapolada  $(E_{mer})$ , mostrado na Fig. 5.13, é menor que os resultados apresentados na Fig. 5.10. Entretanto,  $(U_{mer})$  mostra-se acurado e confiável até a malha  $(h)$  de  $10^{-2}$ . Após torna-se inacurado e não confiável.
- Para  $(d\phi)$ : o estimador é inacurado e confiável.

Foram utilizados nos cálculos as ordens verdadeira  $p_m = 2, 4, 6 \dots$

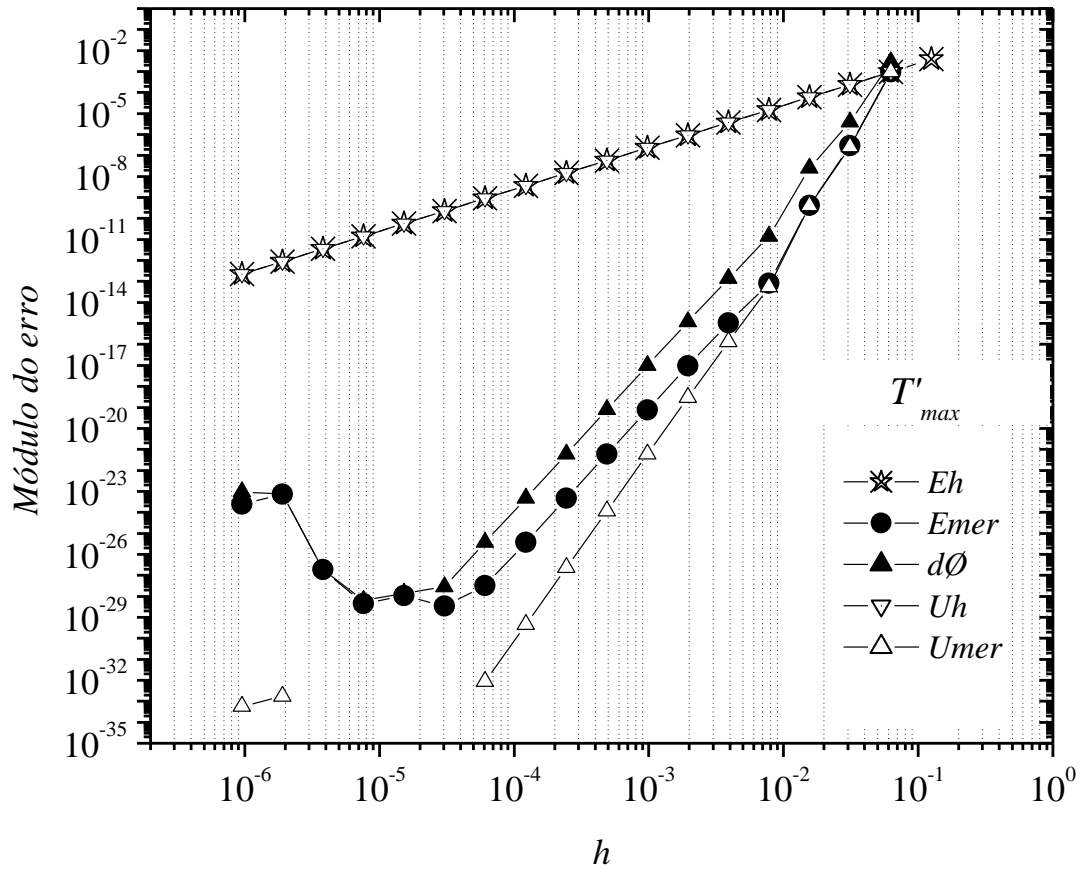


Figura 5.12 - Módulo do erro *versus*  $(h)$  para interpolação de ordem 4 com  $p_0=2$  e  $dp_0=2$ .

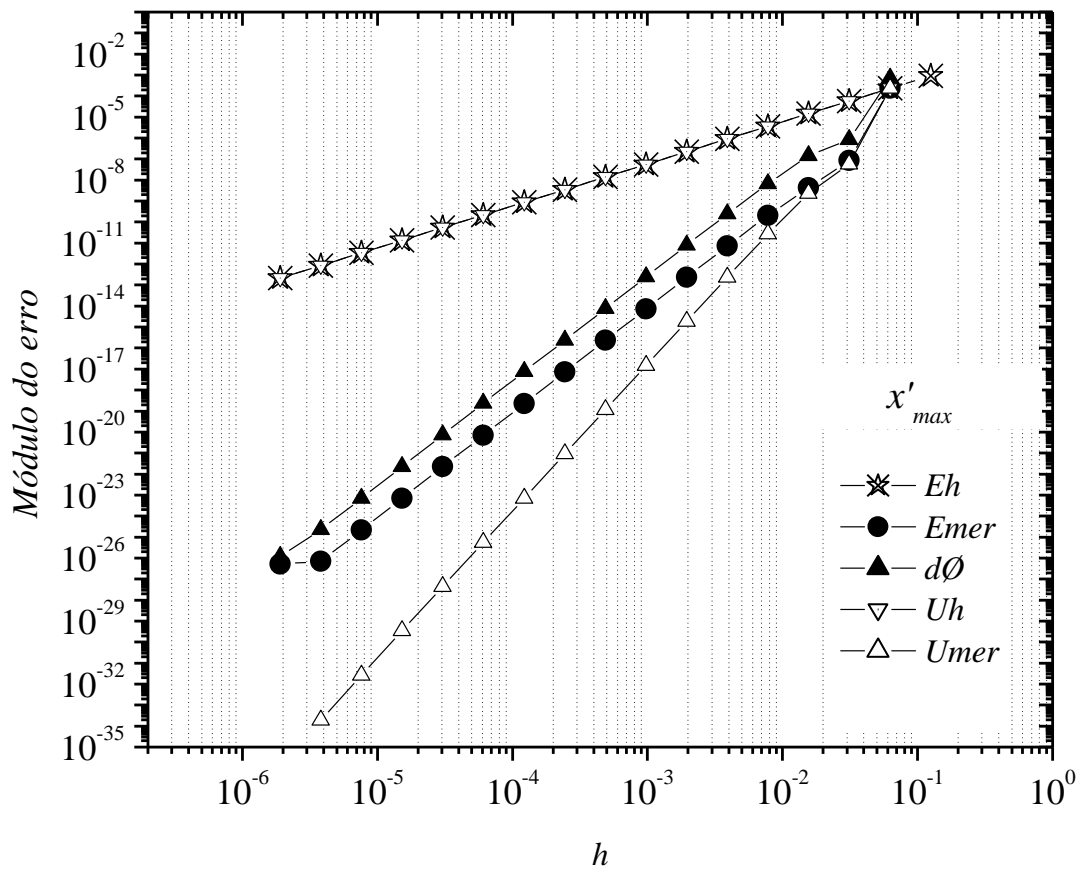
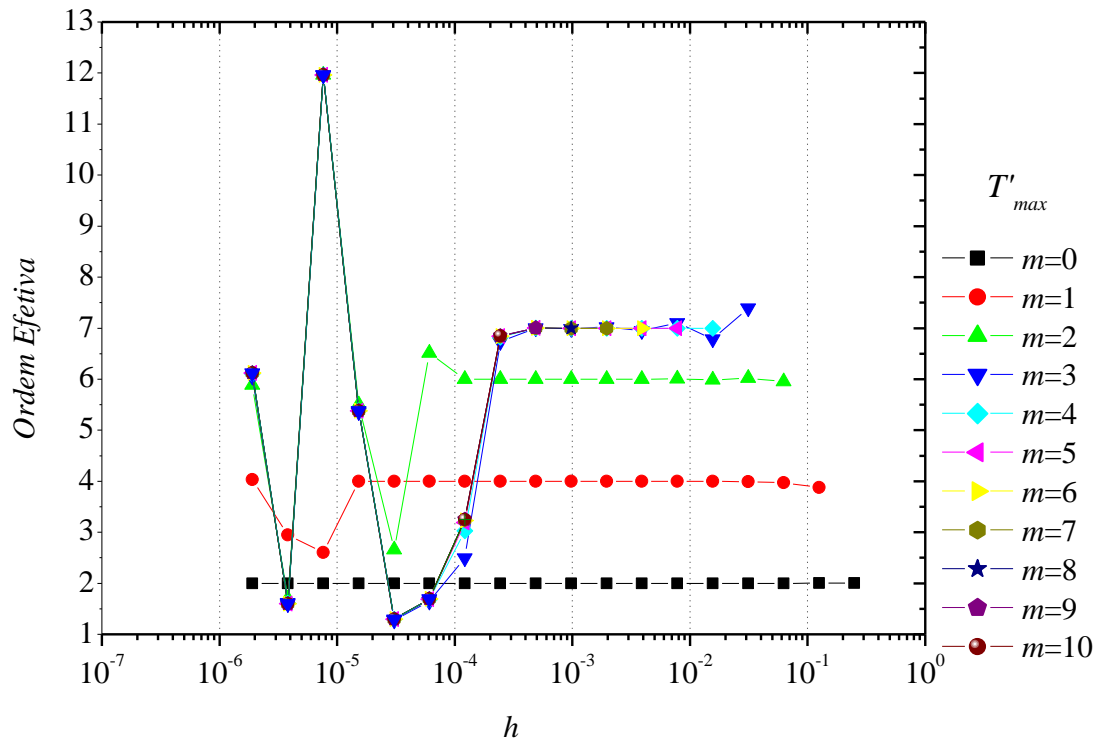
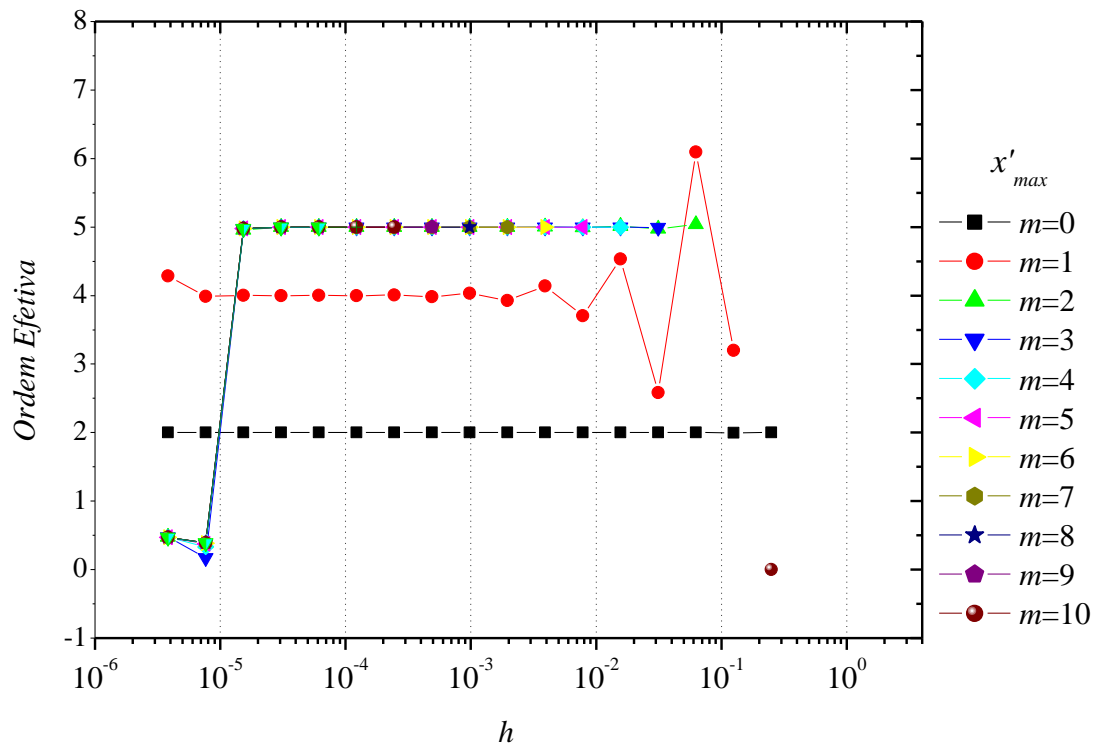


Figura 5.13 - Módulo do erro *versus* ( $h$ ) para interpolação de ordem 4 com  $p_0=2$  e  $dp_0=2$ .

As ordens efetivas da variável ( $T'_{max}$ ) são mostradas na Fig. 5.14 (a). Estas ordens são 2, 4 e 6 para solução numérica com a extrapolação apresentada. A partir da extrapolação  $m>2$  não se pode afirmar a ordem efetiva da solução.

As ordens efetivas da variável ( $x'_{max}$ ) são mostradas na Fig. 5.14 (b). Estas ordens definidas são  $p_E = 2$  para  $m=0$  e  $p_E = 4$  para  $m=1$ . A partir da extrapolação  $m>1$  não se pode afirmar a ordem efetiva da solução.

(a) Para ( $T'_{max}$ )(b) Para ( $x'_{max}$ )

**Figura 5.14 - Ordem efetiva ( $p_E$ ) para versus o tamanho da malha ( $h$ ) e número de extrapolações ( $m$ ) para interpolação de ordem 4.**

#### 5.4.4 Aplicação de MER por meio de interpolação de décima ordem

Para este caso, a função  $\Omega_g(x)$  foi obtida por meio da interpolação de décima ordem. O erro e as sua estimativa com e sem MER para as soluções numéricas ( $T'_{max}$ ) obtida para cada tamanho de malha ( $h$ ) são mostrados na Fig.5.15. Com base nesta figura conclui-se:

- Para  $(U_h)$  : o estimador de Richardson demonstra ser acurado e confiável em relação a  $(E_h)$ .
- $(U_{mer})$  mostra-se sensível a ordem do polinômio. É observado que este estimador torna-se mais acurado e confiável a medida que aumenta a ordem do polinômio interpolador. Além disso, é observado que o erro da solução numérica interpolada e extrapolada ( $E_{mer}$ ) é contaminada pelo erro de arredondamento quando  $(E_{mer})$  muda de tendência como pode ser observado na Fig. 5.15. Este fato é motivado pela quantidade de cálculos envolvidos para a obtenção dos coeficientes do método da interpolação de Newton. Nesta mudança de tendência de  $(E_{mer})$ , o erro de arredondamento passa a ser o erro de maior representatividade na equação geral do erro, ou seja,

$$E(\phi) \cong f(E_\pi, E_h, E_D) . \quad (5.12)$$

sendo que qualitativamente pode ser considerado

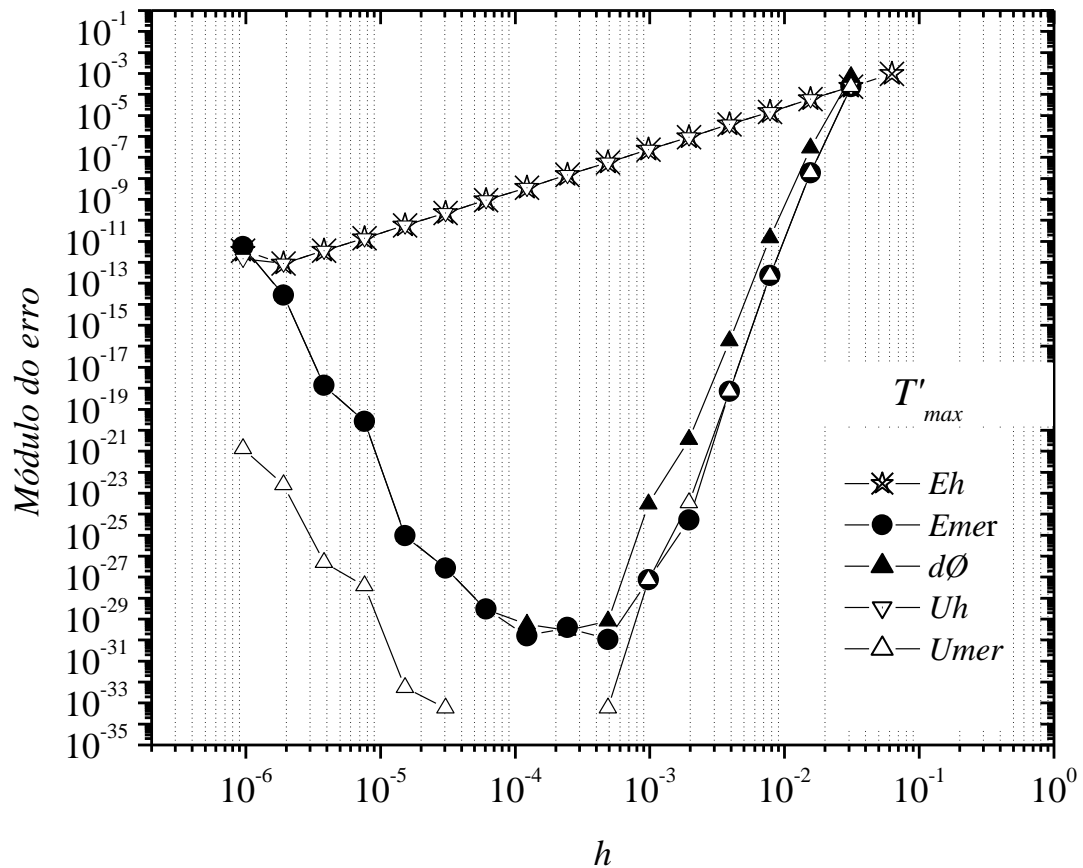
$$(E_\pi > E_h + E_D) . \quad (5.13)$$

O estimado de Richardson para soluções extrapoladas ( $U_{mer}$ ) apresenta em relação a ao erro da solução numérica interpolada e extrapolada ( $E_{mer}$ ) acurado e confiável até seu erro atingir o valor de  $10^{-28}$ . Após este valor, o estimador apresenta inacurado e não confiável. A interrupção no gráfico de  $(U_{mer})$  é devido ao incapacidade do computador trabalhar com números de tão pequena magnitude, identificando-os como zeros.

- Para  $(d\phi)$ : o estimador é inacurado e confiável.

Foram utilizados nos cálculos as ordens verdadeira  $p_m = 2, 4, 6 \dots$

Na Fig. 5.15, observa-se também uma certa limitação na redução do erro comparativamente com a solução ideal apresentada na Fig. 5.6. A queda do erro não é idêntica e possui pequenas variações nos resultados de  $(E_{mer})$  e  $(U_{mer})$  devido a própria interpolação produzir novos erros, em especial erros de arredondamentos.



**Figura 5.15 - Módulo do erro *versus* ( $h$ ) com interpolação de ordem 10 com  $p_0=2$  e  $dp_0=2$ .**

As considerações apresentadas para  $(T'_{max})$  na Fig.5.15 valem para  $(x'_{max})$  mostrado na Fig. 16



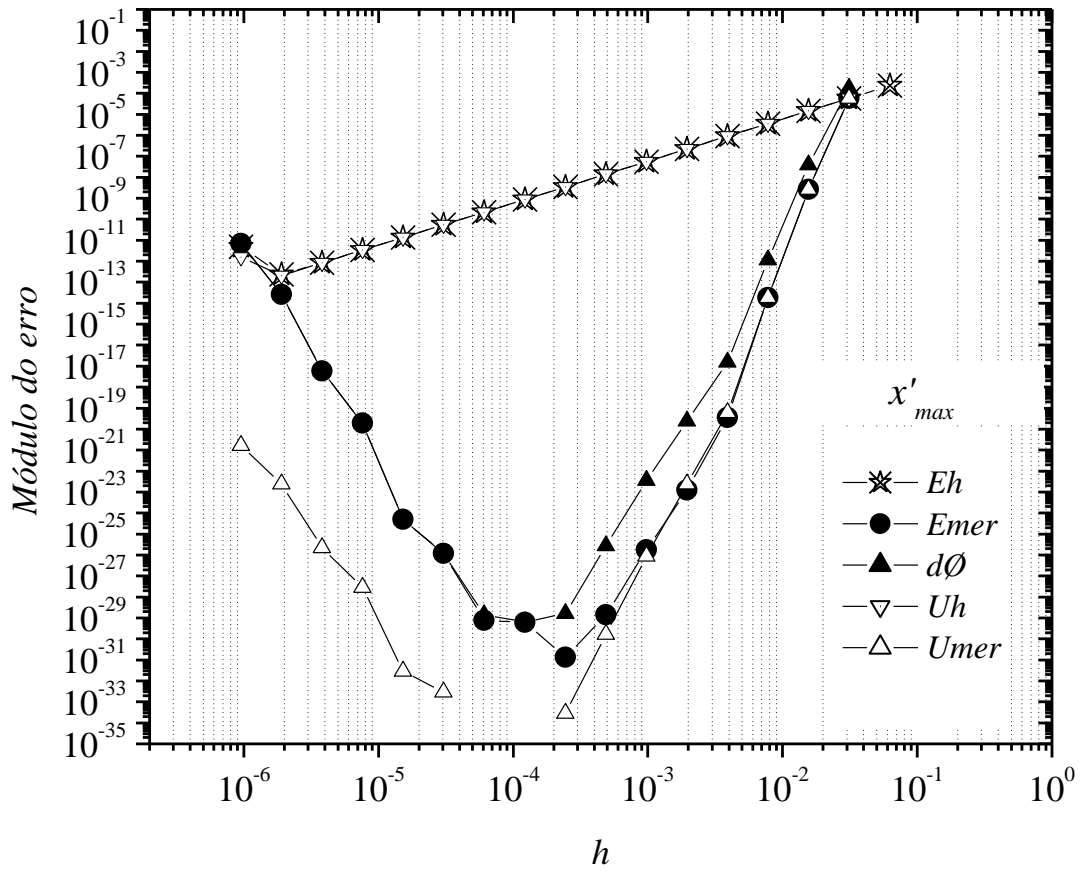


Figura 5.16 - Módulo do erro *versus* ( $h$ ) para interpolação de ordem 10 com  $p_0=2$  e  $dp_0=2$ .

Para as variáveis para  $(T'_{max})$  e  $(x'_{max})$ , Fig. 5.17, são apresentadas, em função do tamanho da malha ( $h$ ), as ordens efetivas ( $p_E$ ) para cada número de extrapolação. As ordens efetivas são respectivamente 2, 4, 6 e 8, tanto para  $(T')$  quanto para  $(x')$ , isto é:

- $(p_0 = 2)$ ;
- $(p_1 = 4)$ ;
- $(p_2 = 6)$ ;  $e$
- $(p_3 = 8)$ .

São confirmadas *a posteriori* as ordens calculadas *a priori* até a ordem  $(p_3 = 8)$ .

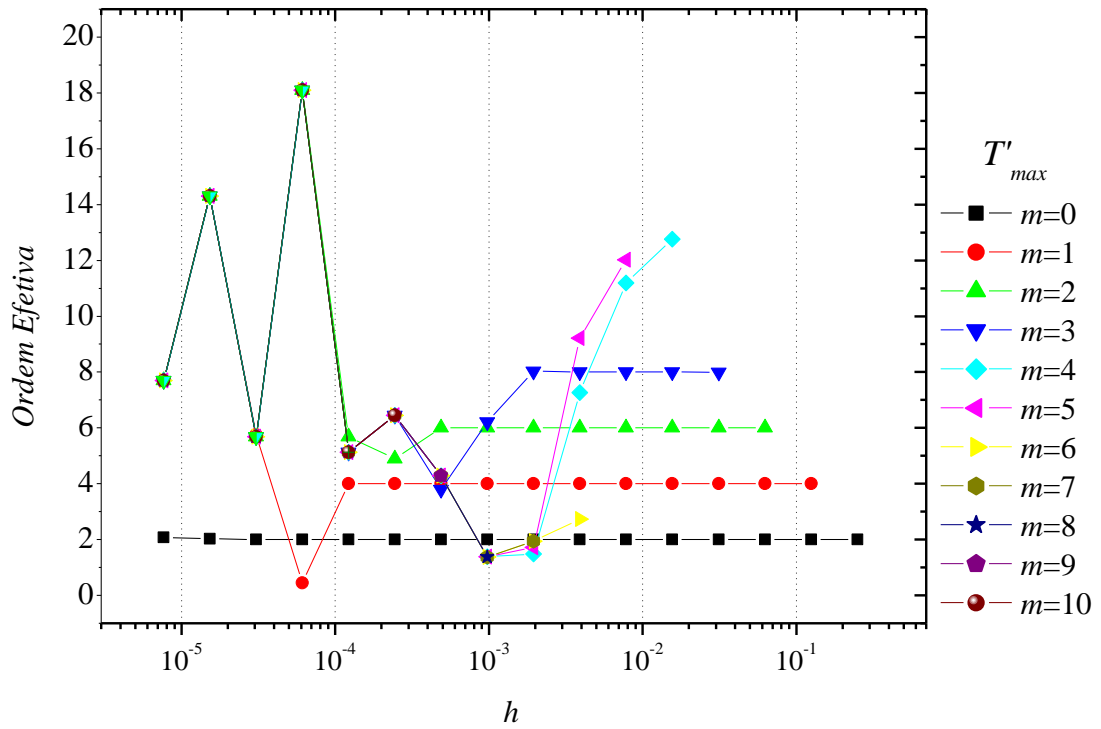
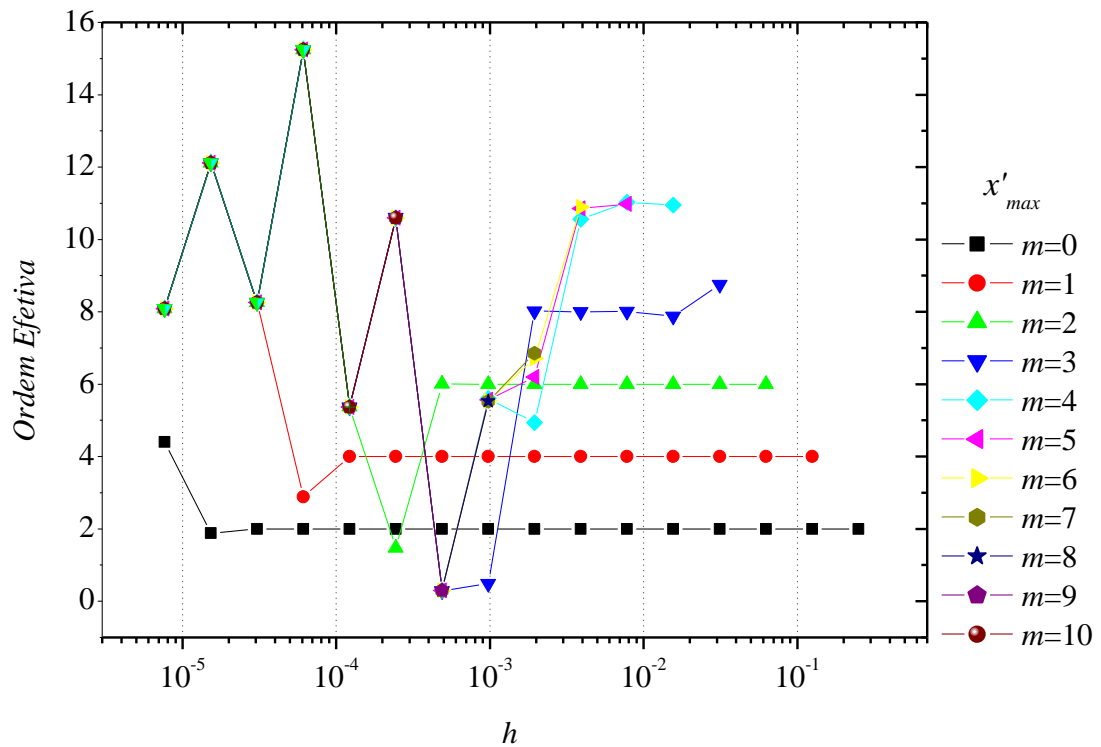
(a) Para  $(T'_{max})$ (b) Para  $(x'_{max})$ 

Figura 5.17 - Ordem efetiva ( $p_E$ ) versus o tamanho da malha ( $h$ ) e número de extrapolações ( $m$ ) para interpolação de ordem 10.

Observa-se que a ordem do erro resultante do emprego de MER para  $(T'_{max})$  e  $(x'_{max})$  aliado à interpolação aumenta com a ordem do polinômio. Isto é,

- Ordem do erro resultante do emprego de MER para interpolação de segunda ordem: para  $T'_{max}: p_m = 2, 4$  e  $x'_{max}: p_m = 2$ .
- Ordem do erro resultante do emprego de MER para interpolação de quarta ordem: para  $T'_{max}: p_m = 2, 4, 6$  e  $x'_{max}: p_m = 2, 4$
- Ordem do erro resultante do emprego de MER para interpolação de décima ordem: para  $T'_{max}: p_m = 2, 4, 6, 8$  e  $x'_{max}: p_m = 2, 4, 6, 8$

#### 5.4.5 Comparação dos resultados

Nas Figs. 5.22 e 5.23 mostra-se a redução de erro de discretização de MER aliado ou não a interpolação para as variáveis de interesse  $(T_{max})$  e  $(x_{max})$ . À medida que a grau do polinômio interpolador da solução numérica sem extrapolação é aumentada observa-se que houve a redução do erro de discretização e a significativa melhora operacional dos estimadores de erros  $(U)$  e  $(d\phi)$ . A interpolação de segundo ordem associada à MER é a mais simples e a que produz menor eficiente a MER. Não apresenta ganhos significativos na redução do erro numérico. MER se torna realmente eficiente aliado a interpolação de 10<sup>a</sup> ordem.

Portanto, a partir das soluções numéricas obtidas pelo programa Poisson\_1Dp\_3p1\_64BITS associadas a MER com e sem interpolação conforme Figs. 5.18 e 5.19 foram investigadas quatro situações para aumentar a eficiência de MER para as variáveis  $(T_{max})$  e  $(x_{max})$ . :

- Aplicação de MER em  $(T_{max})$  e  $(x_{max})$  sem qualquer interpolação ( $I^0$ ).
- Aplicação de MER em  $(T_{max})$  e  $(x_{max})$  com interpolação de segunda ordem ( $I^2$ ).
- Aplicação de MER em  $(T_{max})$  e  $(x_{max})$  com interpolação de quarta ordem ( $I^4$ ).
- Aplicação de MER em  $(T_{max})$  e  $(x_{max})$  com interpolação de décima ordem ( $I^{10}$ ).

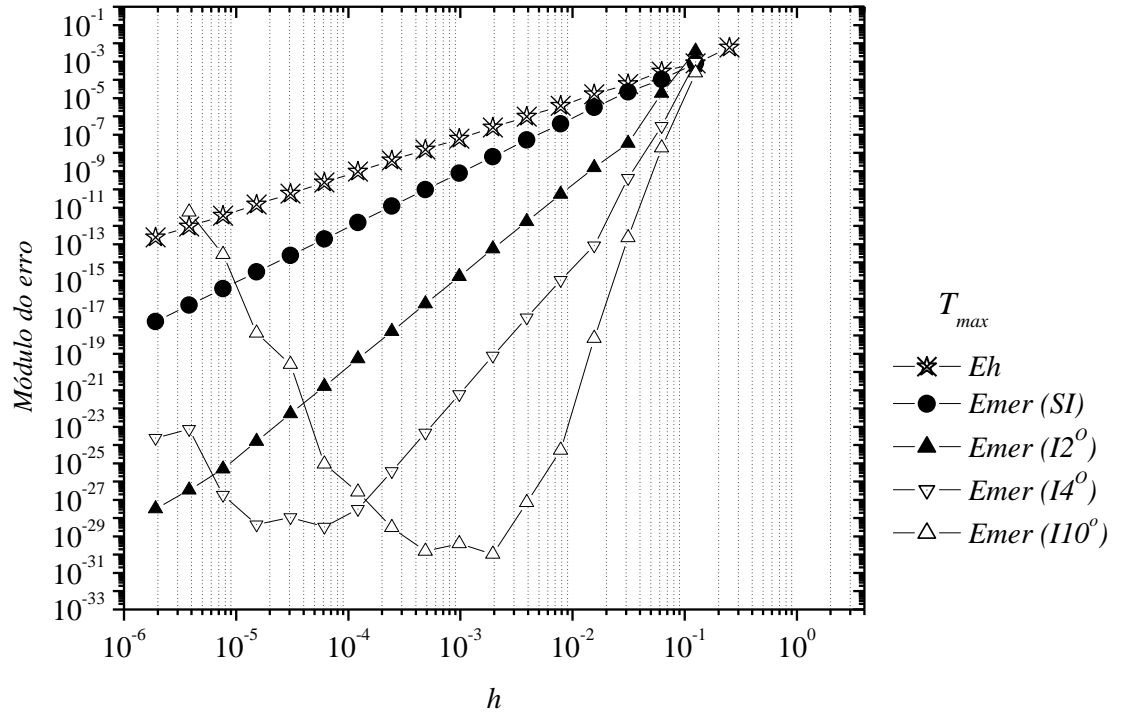


Figura 5.18 - Módulo do erro versus ( $h$ ) para diversas interpolações com  $p_0=2$  e  $dp_0=2$ .

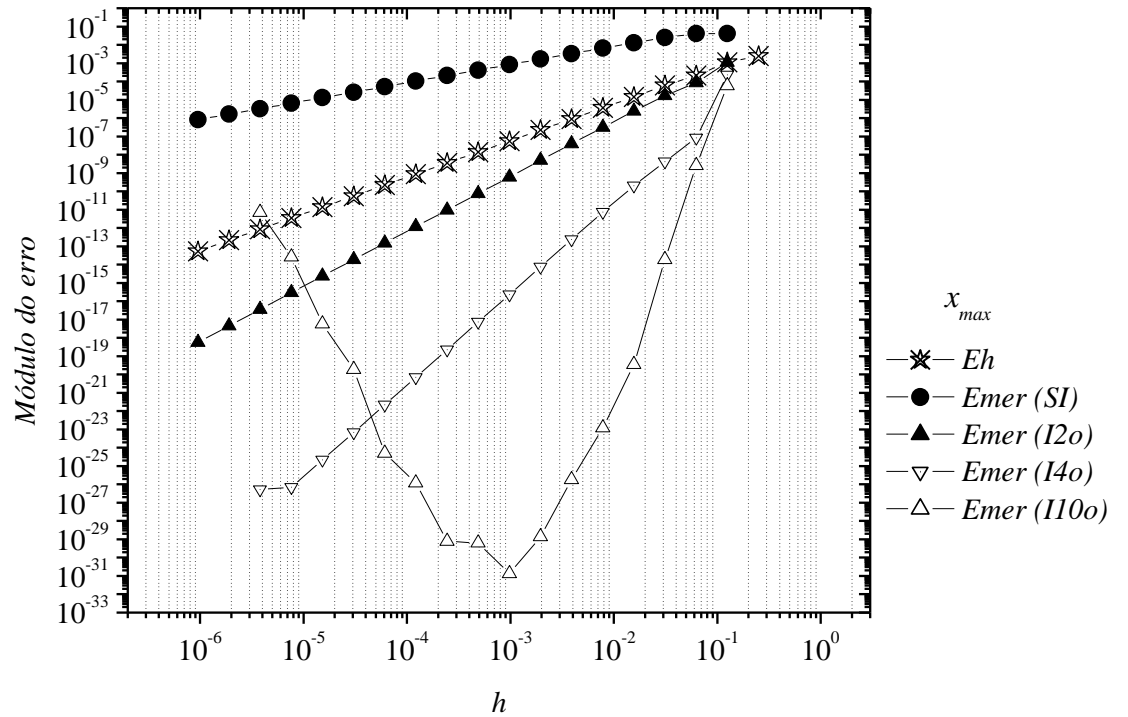


Figura 5.19 - Módulo do erro versus ( $h$ ) para diversas interpolações com  $p_0=2$  e  $dp_0=2$ .

### 5.4.6 Redução e estimativa do erro

Com base nos dados da Fig. 5.15, as Tabs. 5.3 e 5.4 foram desenvolvidas para mostrar o ganho de eficiência com relação a redução do erro de numérico na utilização de MER. Na Tab. 5.3 foram fixadas três malhas com 64, 256 e 1024 nós. A razão de  $(E_h)$  e  $(E_{mer})$  mostra a redução do erro de MER em relação à solução numérica sem extrapolação. Para uma malha de 256 nós, a redução do erro com MER é de  $1.6248 \times 10^{13}$  vezes maior que a solução numérica sem extrapolação. À medida que a malha é refinada, a redução do erro é cada vez maior. Esse comportamento é demonstrado para as duas variáveis de interesse estudadas neste capítulo.

**Tabela 5.3 – Redução do erro para malhas fixas para  $(T_{max})$  com interpolação de  $10^a$  ordem.**

Malha	64	256	1024
$h$	$1,5625 \times 10^{-2}$	$3,9062 \times 10^{-3}$	$9,7656 \times 10^{-4}$
$E_h$	$1,4385 \times 10^{-5}$	$8,9913 \times 10^{-7}$	$5,6196 \times 10^{-8}$
$E_{mer}$	$2,5994 \times 10^{-9}$	$3,5338 \times 10^{-20}$	$1,7976 \times 10^{-26}$
$m$ para $E_{mer}$	2	4	6
$E_h / E_{mer}$	5533,96	$2,5444 \times 10^{13}$	$3,1262 \times 10^{18}$

A Tab.5.4 mostra para um nível fixo de erro para a variável  $(T_{max})$  com interpolação de  $10^a$  ordem. Observa-se que o erro numérico na ordem de  $-8 \times 10^{-11}$  precisa ser calculado com uma malha de 15 nós. Para MER são necessários somente 4 nós.

**Tabela 5.4 – Redução de nós de malha para erros fixos para  $(T_{max})$  com interpolação de  $10^a$  ordem.**

Nível do erro	$-2 \times 10^{-5}$	$-3 \times 10^{-9}$	$-8 \times 10^{-11}$
$E_h$	$1.4385 \times 10^{-5}$	$3.5122 \times 10^{-9}$	$8.574 \times 10^{-13}$
$E_{mer}$	$5.7534 \times 10^{-5}$	$2.59942 \times 10^{-9}$	$1.848 \times 10^{-14}$
$m$ para $E_{mer}$	2	2	3
Número de nós para $E_h$	3	9	15
Número de nós para $E_{mer}$	2	2	4

## 6 CONCLUSÃO

Neste capítulo apresentam-se as conclusões referentes ao desenvolvimento da tese a respeito de MÚLTIPLAS EXTRAPOLAÇÕES DE RICHARDSON PARA REDUZIR E ESTIMAR O ERRO DE DISCRETIZAÇÃO EM CONDUÇÃO DE CALOR, tendo em vista os objetivos descritos no capítulo 1 e as recomendações para futuros trabalhos relacionados ao tema tratado.

### 6.1 CONCLUSÃO GERAL

Comprovou-se que o uso múltiplas extrapolações de Richardson para estimar e reduzir o erro de discretização em transferência de calor computacional para as equações de Laplace bidimensional e Poisson unidimensional é eficiente. Para a equação de Poisson, a estimativa do erro é acurado e confiável até o erro numérico atingir aproximadamente  $10^{-27}$ . Após este valor, a estimativa de  $(U_{mer})$  é ineficiente demonstrando ser inacurada e não confiável. Isto ocorreu devido a interferência dos erros de arredondamento incorporados nas soluções numéricas interpoladas, onde interfere negativamente nos resultados da interpolação.

Portanto, foi demonstrado que MER é uma ferramenta capaz de melhorar a acurácia das soluções numéricas diminuindo o seu custo computacional. Esta ferramenta foi empregada eficientemente na redução do erro de discretização nas equações de Laplace bidimensional e até certo limite na equação Poisson unidimensional, como já citado.

O método foi avaliado e aperfeiçoado para o uso em problemas de condução de calor para a equação de Laplace bidimensional e Poisson unidimensional sendo desenvolvido e caracterizado o erro de posição. Foi mostrado que este erro interfere significativamente de convergência de MER. Mostra-se nesta tese que os problemas de convergência de MER não estão relacionados ao fato de tratar de pontos de máximos e/ou mínimo, mas sim ao fato da posição onde são admitidas com solução numérica sem extrapolação não permanecer fixa quando a coordenada deste ponto é desconhecida.

No entanto, MER não pode ser generalizado devido haver a necessidade de avançar este estudo em outras equações mais complexas e consolidar a teoria do erro de posição. Pode-se afirmar que as conclusões alcançadas neste tese são validadas para as equações estudadas e em específico para pontos de máximo.

Os resultados obtidos para variáveis principais e secundárias como a temperatura no centro do domínio, média do campo de temperaturas, taxa de transferência de calor em dois contornos e norma do erro de discretização foram todos satisfatórios e aprovam o método.

Mostra-se, em todos os experimentos numéricos, que MER reduz o erro de discretização e o estimador de erro de Richardson funciona com restrição para resultados numéricos obtidos com MER devido a ser sensível a outros tipos de erros. As respostas apresentaram serem mais efetivas quando os cálculos utilizaram precisão quádrupla e para a equação de Poisson quando interpolação é de décima ordem.

Em relação aos objetivos firmados no capítulo 1 conclui-se que:

### **O objetivo geral:**

O objetivo geral foi cumprido, pois MER e o estimador de Richardson foram:

- Avaliados: MER e o estimador ( $U$ ) foram avaliados nas equações de Laplace bidimensional e Poisson unidimensional no que diz respeito a redução e estimativa do erro de discretização.
- Aperfeiçoados: MER e o estimador ( $U$ ) foram aperfeiçoados para a equação de Poisson devido à utilização da interpolação para tratar as variáveis com coordenadas móveis.
- Generalizado: MER e o estimador ( $U$ ) não puderam ser generalizados devido haver a necessidade de submeter MER e o estimador de Richardson a outros casos mais complexos.

Verificou-se que MER é capaz de reduzir e estimar satisfatoriamente o erro de discretização nos problemas abordados em condução de calor e que MER é capaz de diminuir o consumo da memória computacional e o tempo de *CPU*.

### **Os objetivos específicos:**

O método das múltiplas extrapolações de Richardson foi desenvolvido melhorando o seu entendimento para as variáveis de campo que possuem máximos e mínimos e suas coordenadas. Este entendimento concentra-se na identificação de que o problema não está relacionado com o máximo e/ou mínimo da variável de interesse, mas sim relacionado com as coordenadas móveis deste ponto de acordo com a malha adotada.

A ferramenta MER está disponível nos *softwares* utilizados para o desenvolvimento desta tese bem como sua metodologia detalhada neste trabalho.

## 6.2 RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

As recomendações para os trabalhos futuros baseiam-se em:

- Aplicar a mesma metodologia para situações de máximo e mínimo bi e tridimensionais.
- Implementar um estimador de erro associado a sistemas bi e tridimensionais.
- Analisar a relação entre custo *versus* tempo de processamento para sistemas bi e tridimensionais.
- Aplicar MER a outras equações mais complexas utilizada em engenharia mecânica.

## 6.3 CONTRIBUIÇÃO AO ESTADO DA ARTE

Este trabalho contribuiu ao estado da arte no que diz respeito à redução do erro associado a variáveis móveis representado pelas Eqs. (3.28) e (3.30).



## REFERÊNCIAS

- ANDERSON, J.D.. **Computational fluid dynamics: the basics with applications**. New York: McGraw Hill, 1995.
- ANTON, H; RORRES, C.. **Álgebra linear com aplicações**. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.
- BENJAMIN, A. S.; DENNY, V. E.. **On the convergence of numerical solutions for 2-D flows in a cavity at large Re**. Journal of Computational Physics, v. 33, p. 340-358, 1979.
- BOYCE, W. E.. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 6. ed. São Paulo: McGraw Hill do Brasil, 1995.
- BROADIE, M.; DETEMPLE, J.. **Recent Advances in Numerical Methods for Pricing Derivative Securities**. Scientific Series. Montreal: Cirano, 1996.
- BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D.. **Análise numérica**. São Paulo: Pioneira Thompson, 2003.
- CHAPRA, S. C.; CANALE, R.. **Numerical methods for engineers**. 3. ed. Singapore: McGraw-Hill, 1998.
- COLLINS, G. W.. **Fundamental Numerical Methods and Data Analysis**. Internet ed. 1998. Disponível em: <http://ads.harvard.edu/books>, acesso em: 07/12/2011.
- DEITEL, H.M.; DEITEL, P. J.; NIETO, T. R.; LIN, T.M.; SADHO, P.. **How to program**. New Jersey. Prentice Hall, 2001.
- DICKSTEIN, F.. Esquemas finitas para malhas não-uniformes numéricos em diferenças. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL. **Minicurso**. Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 1995.
- ERTURK, E.; CORKE, T. C.; GÖKÇÖL, C.. **Numerical solutions of 2-D steady incompressible driven cavity flow at high Reynolds numbers**. International Journal for Numerical Methods in Fluids, v. 48, p. 747-774, 2005.
- FIDKOWSKI, K.; DARMOFAL, D.. **Review of Output-Based Error Estimation and Mesh Adaptation in Computational Fluid Dynamics**. AIAA, v. 49, p. 673-694, 2011.
- FORTUNA, A. O.. **Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2000.
- FERZIGER, J. H.; PERIC, M.. **Computational methods for fluid dynamics**. 3. ed. Berlin: Springer, 2002.
- GONÇALVES, M. B.; FLEMMING, D.M.. **Cálculo B: função de várias variáveis, integrais múltiplas, integrais curvilíneas e de superfície**. 2ª. ed. São Paulo: Makron Books, 2007.
- GRASSELLI, M.; PELINOVSKY, D.. **Numerical Mathematics**. USA: Jones end Bartlett, 2008.
- HOLMAN, J. P.. **Transferencia de calor**. 8. ed. Espanha: McGraw-Hill, 1998.

INCROPERA, F. P.; DeWITT, D. P.. **Fundamentos de transferência de calor**. México: Prentice Hall Hispanoamericana, 1999.

ISAACSON, E.; KELLER, H. B.. **Analysis of Numerical Methods**. Dover ed. New York: Dover Publications, 1994.

JACQUES, I., *Mathematics for Economics and Business*. 5ª ed. Spain: Prentice Hall, 2006.

KLINE, M.. **A mathematical through from ancient to modern times**. v. 1. New York: Oxford University Press, 1972.

KREYSZIG, E.. **Advanced Engineering Mathematics**. 8ª ed. New York: Wiley, 1999.

LOMAX, H.; PULLIAM, T. H.; ZINGG, D.W.. **Fundamentals of computational fluid dynamics**. Germany: Springer, 2003.

MARCHI, C. H.. **Verificação de soluções numéricas unidimensionais em dinâmica dos fluidos**. 2001. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica). Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, SC.

MARCHI, C. H.; NOVAK, L. A; SANTIAGO, C.D.. Múltiplas extrapolações de Richardson para reduzir e estimar o erro da equação de Laplace 2D. In: 29º CONGRESSO IBERO LATINO-AMERICANO DE MÉTODOS COMPUTACIONAIS EM ENGENHARIA. **Anais... XXIX CILAMCE**. Maceió, 2008.

MARCHI, C. H.; SILVA A. F. C.. Multi-dimensional discretization error estimation for convergent apparent order. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 27, n. 4. Rio de Janeiro, 2005.

MARCHI, C. H., SUERO, R., ARAKI, L. K.. The lid-driven square cavity flow: numerical solution with a 1024x1024 grid. **ABCM**, July-September, 2009.

MELO Jr., P.A.. **Fronteiras da engenharia química 1**. 1ª ed. Rio de Janeiro: E-papers, 2005.

MONTGOMERY, D. C., RUNGER, G. C., *Applied Statistics and Probability for Engineers*. 3ª ed. USA: John Wiley & Sons, 2003.

MOIN, P.. **Fundamentals of Engineering Numerical Analysis**. New York: Cambridge, 2010.

MUNEM, M. A.; FOULIS, D. J.. **Cálculo**. 1ª ed. v. 1. Rio de Janeiro: LTC, 1982.

OBERKAMPF, W. L.; BLOTTNER, F. G.. Issues in computational fluid dynamics code verification and validation. New Mexico: Sandia National Laboratories, 1997.

OZISIK, M. N.. **Finite difference methods in heat transfer**. Boca Raton: CRC Press, 1994.

PATANKAR, S. V.. **Numerical heat transfer and fluid flow**. New York: McGraw-Hill, 1980.

REDDY, J. N.. **An introduction to the finite element method**. 3. Ed. Texas: McGraw-Hill, 2006.

RICHARDSON, L. F; GAUNT, J. A.. The deferred approach to the limit. **Philosophical Proceedings of the Royal Society of London**, Series A, v. 226, p. 299-361, 1927.

ROACHE, P. J.. Quantification of Uncertainty in Computational Fluid. **Annu. Rev. Fluid Mech.** v. 29, p. 123-160, 1997.

ROACHE, P. J.. Perspective: a method for uniform reporting grid refinement studies. **ASME Journal of Fluids Engineering**. v. 116, p. 405-413, 1994.

ROY, C. J.. **Review of code and solution verification procedures for computational simulation**. Journal of Computational Physics, Vol. 205, pp.131-156, 2005.

SCHREIBER, R.; KELLER, H. B.. **Driven cavity flows by efficient numerical techniques**. Journal of Computational Physics, v. 49, p. 310-333, 1983.

SCURI A. E.. **Fundamentos de Imagem Digital**. Tecgraf PUC-RIO, 2002.

SHYY, W.; GARBEY, M.; APPUKUTAN, A.; WU, J.. **Evaluation of Richardson Extrapolation in Computational Fluid Dynamics**. Numerical Heat Transfer, p. 139-164, 2010.

SIDI, A.. **Practical extrapolation methods: theory and applications**. New York: Cambridge University Press, 2003.

SOROUSHIAN, A.; WRIGGERS, P.; FARJOODI, J.. **Asymptotic upper bounds for the errors of Richardson extrapolation with practical application in approximate computations**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 80, p. 565-595, 2009.

STERN, F.; COLEMAN, H. W.; PATERSON, E. G.. **Comprehensive approach to verification and validation of CFD simulations - Part 1: methodology and procedures**. Journal of Fluids Engineering, vol. 123, p. 793-802, 2001.

STRUIK, D. J.. **A source book in mathematics, 1200 -1800**. USA: MIT, 1969.

SUERO, R.. **Verificação de soluções numéricas de escoamentos bidimensionais laminares em malhas uniformes**. 2006. 188 f. Dissertação (Mestrado em métodos numéricos em engenharia) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Paraná.

SUN, H.; ZHANG, J.. **A high-order finite difference discretization strategy based on extrapolation for convection diffusion equations**. Wiley, v. 20, p. 18-32, 2004.

TANNEHILL, J. C.; ANDERSON, D. A.; PLETCHER, R. H.. **Computational fluid mechanics and heat transfer**. 2. ed. USA Washington: Taylor & Francis, 1997.

TÁBOAS, P. Z.. **Cálculo de uma variável real**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2008.

VERSTEEG, H; MALALASEKERA, W.. **An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method**. England: Longman Cientific & Technical, 2007.

VENDITTI, D.; DARMOFAL, D..**Adjoint Error Estimation and Grid Adaptation for Functional Outputs: Application to Quasi-on-Dimensional Flow**. Jornal of Computational Physics, v. 164, p. 204-227, 2000.

ZLATEV Z.; DIMOV, I.; FARAGÓ, I.; GEORGIEV, K.; HAVASI, Á.; OSTROMSKY, T..**Richardson extrapolated Numerical Methods for Treatment of One-Dimensional Advection Equations**. Numerical Methods and Applications, v. 6046, p. 198-206, 2011.

WANG, Y-M.; ZHANG, H-B..**Higher-order compact finite difference method for systems of reaction-diffusion equations**. Journal of Computational and Applied Mathematics, v. 233, p. 502-518, 2009.